

GEOVANI BRESOLIN

**MODELO VISCOPLÁSTICO COM
DANO NÃO LOCAL APLICADO A
ROCHAS SALINAS SOB
DEFORMAÇÕES FINITAS**

FLORIANÓPOLIS

2016

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELO VISCOPLÁSTICO COM DANO NÃO LOCAL
APLICADO A ROCHAS SALINAS SOB
DEFORMAÇÕES FINITAS**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de
Doutor em Engenharia Mecânica

GEOVANI BRESOLIN

Florianópolis, Abril de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bresolin, Geovani

Modelo viscoplastico com dano não local aplicado a
rochas salinas sob deformações finitas / Geovani Bresolin;
orientador, Marcelo Krajnc Alves - Florianópolis, SC, 2016.
120 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Mecânica dos Sólidos. 3.
Elementos Finitos. 4. Viscoplasticidade. 5. Mecânica do
Dano. I. Alves, Marcelo Krajnc II. Universidade Federal
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica. III. Título.

MODELO VISCOPLÁSTICO COM DANO NÃO LOCAL APLICADO A ROCHAS SALINAS SOB DEFORMAÇÕES FINITAS

GEOVANI BRESOLIN

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica, Área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Orientador

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D. - UFSC
Presidente

Rodrigo Rossi, Dr. Eng. - UFRGS
Relator

Lindaure Maria Steffens, Dra. - UDESC

José Carlos de Carvalho Pereira, Dr. Eng. -
UFSC

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D. - UFSC

Rogério Marczak, Dr. Eng. - UFRGS

Com enorme gratidão dedico este trabalho a meus pais, que sempre me apoiaram com amor e me ensinaram a persistir nos meus objetivos, ajudando alcançá-los.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar saúde, perseverança e inteligência para a realização desta tese.

Agradeço aos meus pais, Irene e Olintho, por todo o amor incondicional, apoio e incentivo, sempre.

Ao meu orientador, Professor Marcelo, por toda a atenção e dedicação e, sobretudo, pelo aprendizado que me proporcionou.

Agradeço a todos os professores do PosMec, que muito colaboraram para o meu aperfeiçoamento profissional.

Agradeço à minha namorada, Suelen, por todo o carinho, paciência e apoio.

Agradeço aos meus colegas do GMAC, pela troca de conhecimento e momentos de descontração.

Agradeço aos professores Rodrigo Rossi, Rogério Marczak, Lindaura Maria Steffens, José Carlos de Carvalho Pereira e Hazim Ali Al-Qureshi por terem participado da banca examinadora e pelas contribuições sugeridas que melhoraram esta tese.

Agradeço ao PosMec pela infraestrutura oferecida e por ter me proporcionado a oportunidade de poder crescer mais como pessoa e como profissional.

Agradeço à Agência Nacional do Petróleo - ANP, pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de estudos.

Agradeço a todos os familiares e amigos que me apoiaram e de alguma forma se envolveram e contribuíram com este trabalho.

“Para realizar grandes conquistas, devemos não apenas agir, mas também sonhar; não apenas planejar, mas também acreditar.”

Anatole France

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

MODELO VISCOPLÁSTICO COM DANO NÃO LOCAL APLICADO A ROCHAS SALINAS SOB DEFORMAÇÕES FINITAS

Geovani Bresolin

Abril / 2016

Orientador: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Palavras-chave: rochas salinas, viscoplasticidade, deformações finitas, dano não local.

O presente trabalho consiste em propor um modelo constitutivo elasto-viscoplástico com dano não local para a análise do comportamento dúctil e frágil de rochas salinas, no âmbito de grandes deformações, e desenvolver um sistema computacional, baseado no método dos elementos finitos, visando à solução de problemas em estado plano de deformações e axissimétricos. A formulação do modelo procede com uma descrição Lagrangeana total e considera as equações constitutivas escritas em termos da medida de deformação de *Hencky* e da tensão rotacionada de *Kirchhoff*. A modelagem da resposta dúctil (fluência primária e secundária) é descrita adotando um critério de escoamento de *Drucker-Prager* e a lei de fluência de Multimecanismos de Deformação (M-D) ou uma versão modificada da lei de Mecanismo Duplo. A descrição da degradação da rocha é baseada em um modelo constitutivo desenvolvido para a análise do comportamento de geomateriais, o qual considera o dano perante deformações volumétricas expansivas e permite estimar o comportamento frágil da rocha. No modelo teórico proposto considera-se, ainda, uma teoria não local de dano baseada na teoria de primeiro gradiente do dano, tendo como objetivo principal reduzir a sensibilidade da malha de elementos finitos na resposta dos problemas. Além disso, propôs-se um método numérico semi-implícito, na formulação incremental do problema, com a finalidade de obter soluções numéricas aproximadas utilizando o método de elementos finitos de *Galerkin*. A fim de validar o modelo proposto e o código implementado foram simulados numericamente alguns ensaios mecânicos de rochas, além da simulação do comportamento de distintos túneis em formações salinas para fins de avaliação qualitativa das respostas da fluência e do dano. O modelo constitutivo proposto, através do código

desenvolvido, forneceu uma representação adequada do comportamento de fluência das rochas salinas e descreveu qualitativamente bem o dano gerado nestas rochas.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Mechanical Engineering.

Geovani Bresolin

April / 2016

Advisor: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D..

Area of Concentration: Mechanical Analysis and Design.

Keywords: rock salt, viscoplasticity, finite strains, non-local damage.

The objectives of this study were to propose an elasto-viscoplastic constitutive model with non-local damage for the analysis of the ductile and brittle behavior of rock salt under finite strains, and develop a computer system, based on the finite element method, in order to solve plane strain and axisymmetric problems. The model formulation proceeds with a total Lagrangian description and considers the constitutive equations written in terms of the *Hencky* strain measure and the rotated *Kirchhoff* stress. The modeling of the ductile response (primary and secondary creep) is described employing the *Drucker-Prager* yield criterion and the Multi-mechanism Deformation (M-D) model for creep or a modified version of the Double Mechanism creep law. The description of rock degradation is based on a constitutive model developed for the analysis of the behavior of geomaterials, which considers the damage under expansive volumetric strains and allows the brittle behavior of the rock to be estimated. In the proposed theoretical model a non-local damage theory based on the first gradient theory for damage is also considered, mainly in order to reduce the sensitivity of the response of the finite elements mesh to the problems. Moreover, in the incremental formulation of the problem a semi-implicit numerical scheme is proposed, aimed at obtaining approximate numerical solutions using the *Galerkin* finite element method. In order to validate the proposed model and the code implemented some rock mechanical tests were numerically simulated along with the behavior of different tunnels in saline formations to obtain a qualitative evaluation of creep and damage responses. The proposed constitutive model, through the code developed, provided an acceptable representation of the creep behavior of rock salt and good qualitative description of the damage generated in these rocks.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Amostras de alguns tipos de evaporitos (MOHRIAK; SZATMARI, 2008).	4
1.2	Maiores depósitos de sal em águas profundas ao redor do mundo (PEREZ et al., 2008).	5
1.3	Potenciais problemas durante a perfuração em camadas salinas (PEREZ et al., 2008).	8
1.4	Deslocamento do poço devido a movimentação do sal (PEREZ et al., 2008).	9
1.5	Modelo de uma caverna em rocha salina - distribuição de tensões (à direita) em torno de caverna (BARY et al., 2002) . .	10
1.6	Ruptura por flexão - comum em aberturas no maciço rochoso, como no teto de minas subterrâneas de sal (JEREMIC, 1994). .	10
1.7	Tensões no corpo de prova em um ensaio triaxial de fluência. (a) corpo de prova sob tensão confinante; (b) aplicação da tensão diferencial – adaptado de Damin (2012).	12
1.8	Comportamento clássico da deformação por fluência do sal (COUNCIL, 1996).	13
1.9	Comportamento de fluência do sal a 25°C para pressões confinantes de 1, 2 e 5 MPa (FOSSUM; FREDRICH, 2002).	13
1.10	Mapa dos mecanismos de deformação do sal, (MUNSON, 1979).	15
1.11	Desenvolvimento e abertura de microfissuras em uma amostra de sal submetida à baixa tensão confinante – adaptado de Chan et al. (1994).	18
2.1	Cinemático do processo de deformação – adaptado de Machado (2006).	26
3.1	Seção do plano π da superfície de escoamento de <i>Mohr-Coloumb</i> e as aproximações de <i>Druker-Prager</i> (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008).	49
5.1	Corpo de prova cilíndrico antes e após a deformação – adaptado de Alfredsson e Stigh (2004).	81
5.2	Malha e condições de contorno para a simulação dos ensaios triaxiais.	82
5.3	Resultados experimentais e numéricos para a halita brasileira – lei de Mecanismo Duplo Modificada.	84
5.4	Evolução da variável κ em função de ϵ_{ef}^p	85
5.5	Resultados experimentais e numéricos para a halita brasileira – lei de Multimecanismos de Deformação.	87

5.6	Resultados experimentais e numéricos - sal de <i>West Hackberry</i> à 80 °C.	89
5.7	Resultados experimentais e numéricos - sal de <i>West Hackberry</i> à 22 °C.	89
5.8	Condições de contorno e a malha para a simulação do ensaio de tração.	90
5.9	Curva tensão-deformação da simulação do ensaio de tração.	91
5.10	Evolução do dano em função do tempo.	92
5.11	Malha e condições de contorno para a simulação do túnel circular.	94
5.12	Deslocamentos na direção x e y - sal de brasileiro.	94
5.13	Deformação efetiva e tensão equivalente de <i>von Mises</i> - sal brasileiro.	95
5.14	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xx} e σ_{yy} - sal brasileiro.	95
5.15	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xy} e σ_{zz} - sal brasileiro.	95
5.16	Deslocamentos na direção x e y - sal de <i>West Hackberry</i>	96
5.17	Deformação efetiva e tensão equivalente de <i>von Mises</i> - sal de <i>West Hackberry</i>	96
5.18	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xx} e σ_{yy} - sal de <i>West Hackberry</i>	97
5.19	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xy} e σ_{zz} - sal de <i>West Hackberry</i>	97
5.20	Malha e condições de contorno para a simulação do túnel em arco.	98
5.21	Deslocamentos na direção x e y	99
5.22	Deformação viscoplástica efetiva e tensão equivalente de <i>von Mises</i>	99
5.23	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xx} e σ_{yy}	100
5.24	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xy} e σ_{zz}	100
5.25	Malha e condições de contorno para a simulação do túnel retangular.	101
5.26	Deslocamentos na direção x e y	102
5.27	Tensão equivalente de <i>von Mises</i> e tensão hidrostática.	102
5.28	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xx} e σ_{yy}	102
5.29	Tensões de <i>Cauchy</i> σ_{xy} e σ_{zz}	102
5.30	Distribuição do dano.	103

LISTA DE TABELAS

1.1	Principais minerais formadores das rochas evaporíticas (adaptado de Mohriak e Szatmari (2008)).	3
3.1	Conjunto de equações do primeiro modelo constitutivo - lei de fluência de Multimecanismos de Deformação.	63
3.2	Conjunto de equações do segundo modelo constitutivo - lei de fluência de Mecanismo Duplo Modificada.	64
5.1	Especificação dos ensaios triaxiais de fluência em rochas salinas brasileiras (COSTA et al., 2005; POIATE JR; COSTA; FALCAO, 2006).	83
5.2	Parâmetros elásticos e das funções $\Psi_{\bar{\eta}\alpha}$, f e G_{vp}^* para as rochas salinas.	83
5.3	Parâmetros viscoplásticos das rochas salinas brasileiras - lei de Mecanismo Duplo Modificada.	84
5.4	Parâmetros viscoplásticos das rochas salinas brasileiras - lei de Multimecanismos de Deformação.	86
5.5	Especificação dos ensaios triaxiais de fluência em rochas salinas de <i>West Hackberry</i> (WAWERSIK; HANNUM; LAUSON, 1980).	88
5.6	Parâmetros viscoplásticos das rochas salinas de <i>West Hackberry</i> - lei de Multimecanismos de Deformação.	88
5.7	Parâmetros de dano.	91

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_c	Tensão confinante
σ_d	Tensão diferencial
μ_o	Módulo de cisalhamento
β	Variável escalar de dano
\mathbf{U}	Tensor de alongamento ou encurtamento direito
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação
ξ	Estado local não tencionado
Ω_o	Configuração de referência
Ω_t	Configuração corrente ou atual
$\bar{\phi}$	Função movimento/deformação
\bar{X}	Ponto material - vetor posição material
\vec{x}	Vetor posição espacial
\vec{u}	Campo de deslocamentos
\vec{v}	Vetor velocidade
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação
\mathbf{L}	Tensor gradiente de velocidade
\mathbf{W}	Tensor taxa de rotação
\mathbf{R}	Tensor rotação pura
\mathbf{C}	Tensor deformação de <i>Cauchy-Green</i> à direita
\mathbf{E}	Tensor deformação de <i>Hencky</i>
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor tensão de <i>Kirchhoff</i>
J	Jacobiano de deformação
ρ_o	Densidade de massa na configuração de referência
ρ	Densidade de massa na configuração atual
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de <i>Cauchy</i>
\mathcal{W}	Taxa de trabalho por unidade de massa
\mathbf{P}	Primeiro tensor tensão de <i>Piola-Kirchhoff</i>
\mathbf{S}	Segundo tensor tensão de <i>Piola-Kirchhoff</i>
$\boldsymbol{\tau}_R$	Tensor tensão rotacionado de <i>Kirchhoff</i>
P_a	Potência virtual das forças inerciais
P_i	Potência virtual das forças internas
P_e	Potência virtual das forças externas
v_t	Parte arbitrária de um corpo na configuração atual
γ	Velocidade das ligações microscópicas
Y	Trabalho interno do dano
\vec{H}	Vetor fluxo de trabalho interno do dano
Γ_t	Contorno do domínio

\vec{b}	Força de corpo prescrita
\vec{t}	Tração externa prescrita
A	Fonte volumétrica de trabalho de dano
A_s	Fonte superficial de trabalho de dano
\vec{n}	Normal externa a Γ_t^r
Γ_t^r	Região do contorno com tração prescrita
Γ_t^u	Região do contorno com deslocamento prescrito
Γ_o^r	Região do contorno inicial com tração prescrita
Γ_o^u	Região do contorno inicial com deslocamento prescrito
K_c	Energia cinética
E_{int}	Energia interna
$\hat{P}_{(e)}$	Potência das forças externas
Q	Fluxo de energia térmica
e	Energia interna específica
r	Densidade volumétrica de produção de calor interno
\vec{q}	Vetor fluxo de calor
T	Temperatura absoluta
S	Produção de entropia
s	Entropia específica
Ψ	Potencial de energia livre de <i>Helmholtz</i>
ϕ	Potencial de dissipação
Ψ_o	Parcela suave do potencial de energia livre de <i>Helmholtz</i>
$I_{\mathbf{K}}$	Função indicadora do conjunto \mathbf{K}
Y_o^r	Força termodinâmica reversível associada a β
\bar{H}_o^r	Força termodinâmica reversível associada ao $\vec{\nabla}_{\vec{x}}\beta$
Y_o^{reac}	Força termodinâmica de reação associada a β
V_k	Vetor de variáveis internas associadas ao endurecimento
A_k	k -ésima variável termodinâmica associada a variável interna V_k
Y_o^i	Força termodinâmica irreversível associada a β
\bar{H}_o^i	Força termodinâmica irreversível associada ao $\vec{\nabla}_{\vec{x}}\beta$
\triangle	Dissipação associada ao problema mecânico
\mathbf{D}_R	Taxa de deformação rotacionada
G^*	Potencial de dissipação
G_{vp}^*	Potencial de dissipação viscoplástico
ϕ^*	Potencial de dissipação do dano
λ_p	Multiplicador viscoplástico
f	Função de escoamento
\mathbb{D}	Tensor constitutivo elástico de quarta ordem
λ_o	Constante de <i>Lamé</i>

\mathbb{I}	Tensor identidade de quarta ordem
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem
δ	Delta de <i>Kronecker</i>
E	Módulo de <i>Young</i>
ν	Coeficiente de <i>Poisson</i>
$\bar{\tau}_{RH}$	Parte hidrostática de $\bar{\tau}_R$
ε_{vol}	Deformação volumétrica
$\langle \circ \rangle^+$	Operador de <i>Macaulay</i>
k_o^g	Parâmetro que mede a influência do dano na vizinhança
P	Função de penalidade exterior
$\bar{\eta}_\alpha$	Parâmetro de penalidade
k_o	Módulo volumétrico
K	Força termodinâmica associada a κ
$\bar{\tau}_R^D$	Tensor tensão deviatórico efetivo rotacionado de <i>Kirchhoff</i>
κ	Variável interna associada ao encruamento isotrópico
c	Coesão real
η	Parâmetro material
ξ	Parâmetro material
\bar{q}	Raiz quadrada do segundo invariante de $\bar{\tau}_R^D$
$\bar{\tau}_{eq}^{vm}$	Tensão equivalente efetiva do tipo <i>von Mises</i>
ϕ	Ângulo de atrito interno
c_o	Constante material
ϑ	Parâmetro de dilatação
$\dot{\varepsilon}_H^D$	Parte hidrostática da taxa de deformação viscoplástica rotacionada
\mathbf{D}_R^{pD}	Parte deviatórica da taxa de deformação viscoplástica rotacionada
$\dot{\varepsilon}_{ef}^p$	Taxa de deformação viscoplástica efetiva
$\bar{\tau}_{ef}$	Medida de tensão efetiva
$\dot{\omega}^p$	Taxa de trabalho inelástico efetivo
$\dot{\varepsilon}_{ef(s)}^p$	Taxa de deformação viscoplástica efetiva estacionária
A_1	Constante material
A_2	Constante material
B_1	Constante material
B_2	Constante material
Q_1	Energia de ativação
Q_2	Energia de ativação
R	Constante universal dos gases
n_1	Parâmetro função da tensão aplicada
n_2	Parâmetro função da tensão aplicada
d_o	Constante material

τ_d	Limite da tensão do mecanismo de deslizamento de discordâncias
H	Função de Heaviside
F	Função transiente
\mathfrak{S}_p	Equação constitutiva genérica
δ_1	Parâmetros de endurecimento
δ_2	Parâmetros de recuperação
ε_t^*	Limite de deformação transiente
K_o	Constante material
c_b	Constante material
m	Constante material
α_w	Constante material
α_r	Constante material
χ_w	Constante material
χ_r	Constante material
A^*	Parâmetro que incorpora o efeito da temperatura
$\dot{\varepsilon}_o$	Taxa de deformação por fluência de referência
τ_o	Tensão equivalente de referência
Q	Energia de ativação
T_o	Temperatura de referência
$\dot{\varepsilon}_{vm}^p$	Taxa de deformação inelástica equivalente
$\dot{\omega}_{vm}^p$	Taxa de trabalho inelástico
c_h	Constante material
c_∞	Constante material
b	Constante material
f^d	Função limite de dano
r_β	Função resistência
Y_o^c	Módulo de resiliência
p_a	Razão entre o módulo de resiliência e o módulo de tenacidade
g_f	Módulo de tenacidade
$I_{\mathfrak{S}}$	Função indicadora do conjunto \mathfrak{S}
η_β	Parâmetro de penalidade
r_β^*	Resistência efetiva
c_β	Constante material
\mathbb{K}_T	Matriz de rigidez tangente local
\mathcal{H}	Conjunto dos deslocamentos e dos danos admissíveis
\mathcal{H}_u	Conjunto dos deslocamentos admissíveis
\mathcal{H}_γ	Conjunto dos danos admissíveis
\mathcal{V}	Conjunto das variações admissíveis
\mathcal{V}_u	Conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis

\mathcal{V}_γ	Conjunto das variações dos danos admissíveis
\mathbb{A}	Tensor de quarta ordem associado ao módulo tangente global
$\tilde{\mathbb{D}}$	Tensor de quarta ordem associado a parte material de \mathbb{A}
\mathbb{D}^{ep}	Módulo tangente consistente elastoviscoplastico
\mathbb{G}	Tensor de quarta ordem - módulo tangente consistente elastoplástico
\mathbb{H}	Tensor de quarta ordem associado a parte geométrica de \mathbb{A}
σ_V	Tensão vertical
σ_H	Tensão horizontal
ϖ	Função de carregamento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivos	2
1.3	Revisão bibliográfica	2
1.3.1	Evaporitos	2
1.3.2	Associações de campos de petróleo a evaporitos . . .	4
1.3.3	Projetos importantes vinculados à rochas salinas . .	5
1.3.4	Desafios no projeto de poços através de seções eva- poríticas	7
1.3.5	Desafios nas aplicações de contenção em seções eva- poríticas	9
1.3.6	Comportamento de fluência do sal	11
1.3.7	Mecanismos de deformação por fluência – primária e secundária	14
1.3.8	Comportamento frágil, semifrágil e dúctil	16
1.3.9	Mecanismos de dano	17
1.3.10	Modelos constitutivos de fluência de rochas salinas .	18
2	LEIS CONSTITUTIVAS PARA MEIOS CONTÍNUOS DANIFICA- DOS	25
2.1	Decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação	26
2.1.1	Resultados da decomposição multiplicativa	27
2.1.2	Pares conjugados de tensão e deformação	28
2.2	Princípio das potências virtuais	29
2.2.1	Equações de equilíbrio na configuração de referência	31
2.3	Leis da termodinâmica nos meios contínuos	33
2.3.1	Primeira lei da termodinâmica	33
2.3.2	Segundo lei da termodinâmica	34
2.3.3	Restrição interna sobre a variável de dano	35
2.4	Método do estado local	37
2.4.1	Variáveis observáveis	38
2.4.2	Variáveis internas	38
2.4.3	Potencial de energia livre de Helmholtz	38
2.4.3.1	Taxa de deformação viscoplástica modificada	40
2.4.4	Independência da dissipação viscoplástica e do dano	41

2.4.5	Potencial de dissipação	42
3	MODELO ELASTOVISCOPLÁSTICO COM DANO NÃO LOCAL PARA ROCHAS SALINAS	43
3.1	Definição do potencial de energia livre	43
3.1.1	Regularização do Potencial de energia livre Helmholtz	45
3.2	Derivação das equações de estado	46
3.2.1	Relação constitutiva hiperelástica	46
3.2.2	Força termodinâmica associada ao encruamento	47
3.2.3	Forças termodinâmicas associadas ao dano	47
3.2.4	Força termodinâmica associada a influência do dano na vizinhança	48
3.3	Definição da função de escoamento	48
3.4	Definição das equações complementares	50
3.4.1	Definição do potencial de dissipação viscoplástico	50
3.4.2	Modelos constitutivos de fluência das rochas salinas	51
3.4.2.1	Modelo de multimecanismos de deformação (M-D)	52
3.4.2.2	Modelo de mecanismo duplo de deformação	54
3.4.3	Incorporação da lei de endurecimento	55
3.4.3.1	Endurecimento por deformação (<i>strain hardening</i>)	56
3.4.4	Formulação do dano	57
3.4.5	Definição do potencial de dissipação do dano	57
3.4.5.1	Regularização do potencial de dissipação de dano	59
3.4.6	Forma forte da equação de evolução do dano não local	59
4	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MODELO	65
4.1	Problema constitutivo de valor inicial elastoviscoplástico	65
4.2	Método de decomposição de operadores (<i>operator split method</i>)	65
4.2.1	Preditor elástico	66
4.2.2	Corretor elastoviscoplástico com dano	68
4.2.3	Mapeamento pela integração exponencial	70
4.2.4	Formulação do Mapeamento de Retorno Viscoplástico	72
4.3	Problema de valor no contorno global	72
4.3.1	Formulação forte do problema	73
4.3.2	Formulação fraca do problema	73

4.4	Formulação incremental do problema elatoviscoplastico com dano	74
4.4.1	Linearização e Método de Newton – Módulo tangente consistente	75
4.4.2	Linearização e Método de Newton – Módulo tangente consistente (dano)	78
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	81
5.1	Ensaio triaxiais de fluência - Sal brasileiro	82
5.1.1	Modelo de Mecanismo Duplo Modificado	83
5.1.2	Modelo de Multimecanismos de Deformação	86
5.2	Ensaio triaxiais de fluência - Sal de <i>West Hackberry</i>	87
5.3	Ensaio de tração uniaxial	90
5.4	Análises de túneis em formações salinas	92
5.4.1	Túnel circular	93
5.4.2	Túnel em arco	98
5.4.3	Túnel retangular	101
6	CONCLUSÕES	105
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Os primeiros estudos de engenharia relacionados às rochas salinas foram impulsionados pela necessidade de desenvolver minas de sal profundas e seguras. Nas últimas décadas, várias investigações detalhadas das propriedades mecânicas das rochas salinas foram realizadas, em resposta à necessidade destas para as seguintes atividades: descarte de resíduos nucleares, mineração, armazenamento estratégico de hidrocarbonetos, armazenamento de energia em ar comprimido e verificação de problemas em poços perfurados próximos e através destas rochas.

As rochas salinas, também conhecidas como evaporitos, em razão de formarem-se da evaporação de águas marinhas, são materiais geológicos importantes na indústria, pois possuem baixa porosidade e permeabilidade em estado natural, apresentam habilidade de suportar grandes deformações sem fissuramento e manifestam o fenômeno de autocicatrização quando fissuradas. Estas características proporcionam as rochas evaporíticas grande capacidade selante, tornando-as formações geológicas ideais para operações de armazenamento.

O interesse da indústria petrolífera pelo sal surge, pois mais de 70% dos maiores campos de petróleo e gás ao redor do mundo estão vinculados a estas estruturas. Logo, o sal evidencia-se como um dos geomateriais mais eficientes na natureza para o aprisionamento de hidrocarbonetos. Entretanto, a perfuração de poços, em águas ultraprofundas através de camadas espessas de sal, apresenta, ainda, grandes desafios tecnológicos devido à fluência e ao fissuramento provenientes destas rochas. Este último no caso de operações com pressão insuficiente de fluido de perfuração. Dentre os principais problemas operacionais registrados pela indústria do petróleo quanto à perfuração através do sal estão: o fechamento do poço, torques elevados, repasses, aprisionamento da coluna de perfuração, desvios e colapso do revestimento. Estes problemas podem levar à perda do poço e gerar prejuízos de milhões de dólares.

Com as inúmeras aplicações para contenção de material e também devido a problemas pertinentes a poços de petróleo, verifica-se a necessidade do amplo entendimento do comportamento dos evaporitos. Portanto, investigações experimentais e formulações de teorias constitutivas para a análise do comportamento de rochas salinas, incluindo a dependência do tempo e os diferentes mecanismos de degradação interna do material, são

de fundamental importância para estas aplicações de engenharia.

1.2 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- Propor um modelo constitutivo elastoviscoplastico com dano não local para a análise do comportamento dúctil e frágil de rochas salinas no regime de deformações finitas. A fim de obter um modelo constitutivo termodinamicamente consistente, a formulação do modelo proposto procede dentro do contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis (LEMAITRE; CHABOCHE, 1994), admitindo a teoria de dano não local de primeiro gradiente proposta por Fremond e Nedjar (1996). O objetivo da teoria de dano não local é reduzir a dependência da malha de elementos finitos na resposta dos problemas.
- Desenvolver um sistema computacional, baseado no método dos elementos finitos, capaz de resolver as equações do modelo proposto e de simular o processo de deformação por fluência e de degradação das rochas salinas de problemas em estado plano de deformações e axisimétricos. A finalidade do sistema computacional é analisar o comportamento de rochas salinas submetidas a carregamentos mecânicos monotônicos.

1.3 Revisão bibliográfica

1.3.1 Evaporitos

Os evaporitos são rochas sedimentares de origem química, constituídas por camadas de minerais salinos, formadas pela evaporação e precipitação de minerais a partir de uma solução salina concentrada (salmoura). Formam-se em ambientes de sedimentação de baixo aporte de terrígenos onde a perda de água por evaporação excede a taxa de influxo de águas no local de evaporação. Segundo Mohriak e Szatmari (2008), o nome evaporito vem da palavra “evapore” e do sufixo grego “litho”, que significa pedra. São várias as classes de minerais precipitados durante a formação de depósitos evaporíticos, entre os principais encontram-se os cloretos, sulfatos e carbonatos.

Tabela 1.1: Principais minerais formadores das rochas evaporíticas (adaptado de Mohriak e Szatmari (2008)).

Classe do Mineral	Nome do Mineral	Composição Química
Cloretos	Halita	NaCl
	Silvita	KCl
	Taquidrita	$\text{CaMg}_2 \cdot \text{Cl}_6 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$
	Carnalita	$\text{KMgCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$
	Bischofita	$\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$
Sulfatos	Anidrita	CaSO_4
	Gipsita	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
	Kainita	$\text{KMg}(\text{SO}_4)\text{Cl} \cdot 3\text{H}_2\text{O}$
	Kieserita	$\text{MgSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$
	Polihalita	$\text{K}_2\text{CaMg}_2(\text{SO}_4)4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$
	Langbeinita	$\text{K}_2\text{Mg}_2(\text{SO}_4)_3$
Carbonatos	Dolomita	$\text{Ca}(\text{Fe},\text{Mg})(\text{CO}_3)_2$
	Calcita	CaCO_3
	Magnesita	MgCO_3
	Trona	$\text{Na}_3\text{H}(\text{CO}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

Os ambientes de formação de evaporitos ocorrem tanto em situações de caráter continental quanto marinho sendo este último normalmente de maior expressão, pois é composto pelos depósitos salinos concebidos ao longo do tempo geológico. Os principais minerais evaporíticos, geralmente encontrados em depósitos salinos marinhos, são apresentados na Tab. 1.1. Na Fig. 1.1 é possível observar alguns destes minerais evaporíticos.

Estas rochas são constituídas em maior quantidade por sulfato de cálcio (CaSO_4) e cloreto de sódio (NaCl) sendo o evaporito predominante a halita (NaCl). Em virtude disso, geralmente, costuma-se utilizar o termo “sal” para definir depósitos evaporíticos constituídos predominantemente por halita.

As rochas salinas, mesmo quando formadas predominantemente por halita, possuem laminações intercaladas, menos significativas, de distintas variedades de sais como a anidrita e a carnalita, podendo apresentar também em sua composição impurezas, devido aos processos de deposição nos ambientes sedimentares. Estas impurezas correspondem a diferentes materiais geológicos como folhelhos¹ e distintos precipitados químicos (SILVA, 2010).

¹ Rochas sedimentares argilosas que podem se se esfoliar segundo camadas finas e paralelas.



Figura 1.1: Amostras de alguns tipos de evaporitos (MOHRIAK; SZATMARI, 2008).

1.3.2 Associações de campos de petróleo a evaporitos

Os evaporitos costumam estar associados a ambientes altamente produtivos em matéria orgânica. No registro geológico são conhecidas associações de campos gigantescos de petróleo com sequências espessas de evaporitos (FREITAS, 2006). De acordo com Florencio (2008), cerca de 70% dos maiores campos de petróleo no entorno do mundo estão vinculados a estas estruturas. Como são materiais dúcteis podem se mover e deformar sedimentos circundantes, criando armadilhas salinas que propiciam o acúmulo de hidrocarbonetos. Além disso, em virtude do baixo percentual de porosidade apresentado por estas rochas, são quase que impermeáveis aos hidrocarbonetos atuando como camadas selantes nos reservatórios. Devido a estas características, os evaporitos são considerados os agentes mais eficientes na natureza para o aprisionamento de petróleo e gás (FARMER et al., 1994).

Este material geológico é encontrado em várias bacias de hidrocarbonetos ao redor do mundo (áreas na cor branca da Fig. 1.2). Existem depósitos significativos nas águas profundas do Golfo do México e em Regiões *offshore* do oeste da África e leste do Brasil, no Mar do Norte e no Mar Mediterrâneo.



Figura 1.2: Maiores depósitos de sal em águas profundas ao redor do mundo (PEREZ et al., 2008).

Vários novos campos de petróleo e gás localizados em províncias de sal ao redor do mundo serão explorados e desenvolvidos nos próximos anos, como nas águas profundas do Golfo do México e nas regiões offshore de Angola, Nigéria (Akpo, Agbami) e Brasil (Bacias de Campos, Santos e Espírito Santo). A maior parte dos objetivos será o subsal (abaixo do sal), com camadas bastante espessas de sal a serem perfuradas (BORGES, 2008).

1.3.3 *Projetos importantes vinculados à rochas salinas*

As primeiras pesquisas globais relacionadas ao comportamento das rochas salinas foram conduzidas especificamente para a indústria da mineração. A partir da década de 1960, o estudo destas rochas tornou-se também necessário para outras aplicações, como para o armazenamento estratégico de hidrocarbonetos e principalmente para o descarte de resíduos radioativos (COSTA; POIATE JR., 2008).

As rochas salinas ou evaporitos suportam níveis elevados de deformação sem desenvolver fraturas e, conforme já mencionado, são praticamente impermeáveis. Sob o efeito de altas pressões e temperaturas, desenvolvem, em consequência da sua particular reologia e estrutura cristalina, o fenômeno de autocicatrização (*self-healing*), ou seja, as fraturas cicatrizam-se retomando, com o tempo, sua excelente qualidade de estanqueidade (COSTA; POIATE JR., 2008).

Em virtude destas características, as rochas evaporíticas, principalmente a halita (NaCl), despertam grande interesse para aplicações de

contenção, como depósitos para descarte de resíduos nucleares e armazenamento de hidrocarbonetos. Portanto, grandes investimentos foram realizados para investigar as propriedades mecânicas destas rochas sob diferentes condições de tensão e temperatura, com o intuito de avaliar tanto seu comportamento reológico quanto sua integridade estrutural com o tempo, sendo que inúmeros trabalhos foram desenvolvidos discutindo este tema na literatura científica (COSTA; POIATE JR., 2008).

Nas últimas décadas foram realizados, em rochas salinas, vários projetos para o armazenamento estratégico de hidrocarbonetos e descarte de resíduos radioativos. No contexto de depósitos de resíduos pode-se destacar o projeto Planta Piloto para Isolamento de Rejeitos (*Waste Isolation Pilot Plant*, WIPP), desenvolvido pelo Departamento de Energia Norte-Americano (DOE) e localizado no remoto deserto de Chihuahuan no estado do Novo México. Este tornou-se o primeiro repositório geológico profundo licenciado do mundo para armazenamento permanente de lixo atômico, entrando em operação em 1999 (COSTA; POIATE JR., 2008).

Na Alemanha é possível citar a mina de sal de Asse, localizada na Baixa Saxônia, a qual deixou de ser economicamente explorada em 1964, tornando-se uma instalação de pesquisa e desenvolvimento para deposição de todos os tipos de rejeitos (FREIRE; TELLO, 2007). Atualmente não estão sendo colocados mais rejeitos no local. Segundo Ayres (2009), as paredes da mina de Asse apresentam fissuras e sinais de instabilidade. Além disso, o depósito sofre com inundações que podem ocasionar, no caso de vazamento de material radioativo dos barris, a contaminação do lençol freático. Devido a estas circunstâncias, esta instalação encontra-se em processo de fechamento.

Para o armazenamento de hidrocarbonetos destaca-se o projeto Reserva Estratégica de Petróleo (*Strategic Petroleum Reserve*, SPR), desenvolvido pelo DOE entre 1973-1974. Neste projeto, cavernas salinas localizadas na parte emersa da bacia do Golfo do México, próximas ao litoral dos estados do Texas e da Lousiana, são utilizadas para o armazenamento de petróleo. De acordo com o DOE, as cavernas de sal proporcionam maior segurança e custam cerca de 10 vezes menos que o armazenamento em tanques (COSTA; POIATE JR., 2008). Este programa possui 62 cavernas subterrâneas que possibilitam armazenar de 6 a 35 milhões de barris, concebendo capacidade para o acúmulo de 727 milhões de barris. Segundo Costa e Poiate Jr. (2008), foi aprovado em 2005 pelo governo norte-americano a expansão deste projeto para o armazenamento de 1 bilhão de barris.

Estes projetos mencionados acima foram os principais impulsionadores pelos grandes investimentos da indústria na pesquisa da mecânica das ro-

chas salinas, proporcionado um melhor entendimento comportamental deste geomaterial nas distintas aplicações de interesse. Os resultados alcançados com estes projetos desempenham a base para a maioria dos novos projetos relacionados a rochas salinas, principalmente pela indústria petrolífera nas recentes descobertas de petróleo e gás abaixo de camadas de sal.

1.3.4 Desafios no projeto de poços através de seções evaporíticas

Do ponto de vista de exploração de petróleo e gás, regiões com a presença de rochas salinas aumentam as chances de sucesso exploratório. Isto ocorre porque estes sedimentos podem se deformar, dissolver, migrar e criar trapas estratigráficas, gerando diversas estruturas propícias à acumulação de hidrocarbonetos (FALCÃO, 2008). Entretanto, a perfuração de rochas evaporíticas proporciona desafios únicos para operações de petróleo e gás, devido à associação destas com um grande número de problemas de estabilidade de poços, quando comparado a outras litologias.

As rochas salinas, em razão de sua estrutura cristalina, quando submetidas a um estado de tensão constante apresentam o fenômeno denominado de fluência (*creep*). Portanto, neste material é possível esperar uma considerável deformação como função do tempo de carregamento. Este fenômeno físico em evaporitos localizados na subsuperfície é sensivelmente influenciado pela espessura da camada, temperatura da formação, composição mineralógica, conteúdo de água, presença de impurezas (como argila) e também pelo modo de deposição do sal, se em uma sequência contínua ou descontínua, ou intercalado com outros sedimentos (COSTA; POIATE JR., 2008; FALCÃO, 2008).

Os cloretos, sais que contêm água (como por exemplo: carnalita, silvinita e taquidrita) apresentam as maiores taxas de fluência. Já os sais de sulfato (por exemplo: anidrita e gipsita) e os de carbonato (por exemplo: calcita e dolomita) são essencialmente imóveis. A halita, o sal mais comum na natureza, é o menos móvel dos sais de cloreto; entretanto, dependendo das condições de tensão e temperatura, pode apresentar consideráveis taxas de fluência (FALCÃO, 2008).

Na etapa de perfuração, o fenômeno de fluência apresentado por este geomaterial pode ocasionar com o tempo o rápido fechamento do poço (Fig. 1.3), causando restrição à passagem da coluna de perfuração e podendo até prendê-la de modo irre recuperável. Nesta situação, em alguns casos é necessário o desvio ou até mesmo o abandono do poço. Além disso, durante a perfuração, o fechamento do poço também poder provir da relaxação de tensões, outro fenômeno apresentado por estas rochas (Fig. 1.3), porém,

menos agravante (FALCÃO, 2008). Há ainda outros problemas durante a perfuração de camadas de evaporitos, como o alargamento excessivo da parede do poço (*washout*) devido ao processo de dissolução do sal e o enfraquecimento da parede em consequência do processo de lixiviação² (Fig. 1.3) (FARMER et al., 1994).

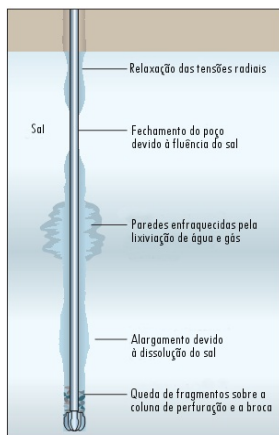


Figura 1.3: Potenciais problemas durante a perfuração em camadas salinas (PEREZ et al., 2008).

Contudo, mesmo após o revestimento do poço, a movimentação do sal pode produzir cargas não uniformes na coluna de revestimento, provocando dobramento (Fig. 1.4), restringindo a passagem de ferramentas e, em casos mais críticos, ocasionando a ruptura, caso a coluna não tenha sido dimensionada adequadamente. Portanto, em projetos de poços, a fluência do sal deve ser considerada em toda a vida útil do poço e não somente na fase de perfuração (FALCÃO, 2008).

²Processo de extração de uma substância presente em componentes sólidos através da sua dissolução em um líquido. É um termo utilizado em vários campos da ciência, como a geologia, ciências do solo, metalurgia e química.

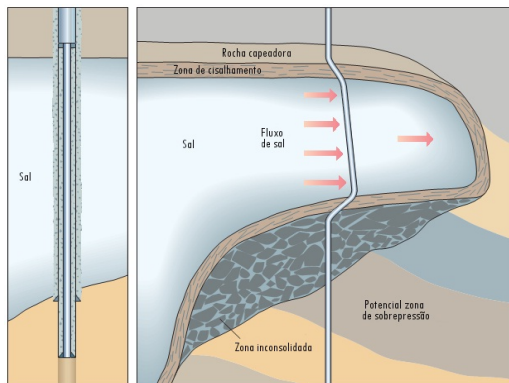


Figura 1.4: Deslocamento do poço devido a movimentação do sal (PEREZ et al., 2008).

1.3.5 Desafios nas aplicações de contenção em seções evaporíticas

Em aplicações de contenção, o comportamento de fluência e o fissuramento do sal podem provocar a redução do volume e o colapso da caverna, respetivamente. Portanto, existem normas regulamentadoras que requerem que os depósitos subterrâneos sejam construídos, operados e mantidos de forma segura, caso contrário, o ambiente pode sofrer danos severos (GEORGE, 2007).

No caso de aplicações de descarte de resíduos nucleares, o fechamento da caverna é requerido, logo o comportamento em fluência do sal é essencial, pois com o tempo ocorrerá o eventual encapsulamento dos resíduos radioativos, minimizando, assim, a possibilidade de vazamento e a contaminação do ambiente. Já os depósitos subterrâneos de hidrocarbonetos sofrem flutuações cíclicas de pressão interna devido a operações de armazenamento (injeção e retirada de fluidos). Como os evaporitos possuem baixa resistência à tração e ao cisalhamento estas flutuações cíclicas de pressão reduzem temporariamente a pressão de confinamento, produzindo tensões de tração que provocam o gradual enfraquecimento da rocha até o microfissuramento (Fig. 1.5) (ASSIS, 1990). Com crescimento e distribuição das microfissuras ocorre a progressiva deterioração da rocha gerando regiões de instabilidade nas superfícies da caverna.

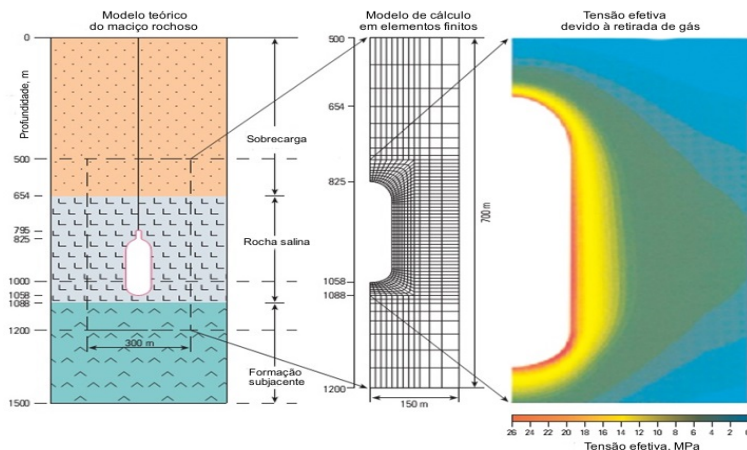


Figura 1.5: Modelo de uma caverna em rocha salina - distribuição de tensões (à direita) em torno de caverna (BARY et al., 2002)

As tensões trativas também são responsáveis pelo gradual enfraquecimento do teto de minas de sal em operação ou desativadas que podem estar sendo utilizadas para o armazenamento de lixo atômico. Nestas minas o problema é ainda mais agravante, visto que a pressão confinante é sempre nula e a sobrecarga de sedimentos produz flexão na camada de sal acarretando no desenvolvimento e na propagação de fraturas de tração (Fig. 1.6).

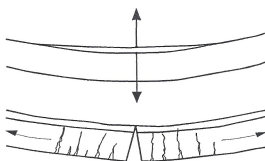


Figura 1.6: Ruptura por flexão - comum em aberturas no maciço rochoso, como no teto de minas subterrâneas de sal (JEREMIC, 1994).

1.3.6 Comportamento de fluência do sal

As rochas salinas são materiais policristalinos e possuem um comportamento similar ao de rochas, no regime frágil, e ao de metais, no regime dúctil. Assim como outros geomateriais, quando submetidas a um carregamento constante, sofrem deformação lenta com o tempo, fenômeno denominado *creep* ou fluência. Entretanto, os efeitos do tempo são mais pronunciados nestas rochas do que na maioria das outras rochas de baixa porosidade (YAHYA; AUBERTIN; JULIEN, 2000).

O comportamento mecânico deste geomaterial é dominado por processos de deformação inelástica, pois apresenta um limite elástico geralmente muito baixo, mesmo à temperatura ambiente. Quando submetido à compressão uniaxial ou triaxial exibe uma resposta mais dúctil que a maioria das outras rochas. Neste contexto, tem sido observado tanto em ensaios laboratoriais quanto em campo, que uma tensão confinante suficientemente alta combinada com uma tensão diferencial³ menor que a resistência máxima da rocha, provoca uma resposta dúctil sem a ocorrência de microfissuramento (AUBERTIN; YAHYA; JULIEN, 1999).

Observações experimentais mostram que as rochas salinas possuem um limite de escoamento muito baixo ($\sigma_E < 1$ MPa) e uma tendência apreciável ao endurecimento (AUBERTIN; YAHYA; JULIEN, 1999). Os resultados de ensaios também evidenciam que perante tensões confinantes (tensões hidrostáticas) menores do que 5 MPa ($\sigma_c < 5$ MPa) e à temperatura ambiente, o sal sofre dilatação com o tempo sob aplicação de uma tensão diferencial. Porém, quando sujeita a tensões confinantes acima de 5 MPa ($\sigma_c > 5$ MPa), flui à volume constante, ou seja, o processo de fluência é isocórico (FREDRICH; FOSSUM; HICKMAN, 2007).

Os ensaios triaxiais de fluência (Fig. 1.7) mostram que dependendo da tensão de confinamento aplicada, o sal pode apresentar dois ou três estágios de fluência. Quando tensões confinantes menores do que 5 MPa são aplicadas, o sal exibe três estágios de fluência, como mostra a Fig. (1.8). No primeiro estágio, denominado de fluência primária ou transiente, a taxa de deformação inicia com um valor alto e diminui, com o tempo, para uma taxa aproximadamente constante. O tempo durante o qual o corpo de prova se deforma em taxa aproximadamente constante é denominado de fluência secundária ou em regime estacionário. Entretanto, sob baixas tensões confinantes ($\sigma_c < 5$ MPa), ocorre após um determinado período, o microfissuramento da rocha e

³Diferença entre a tensão axial e a tensão confinante aplicadas na amostra em um ensaio de compressão triaxial, isto é, $\sigma_d = \sigma_a - \sigma_c$.

o processo de deformação torna-se volumétrico, ou seja, com variação volumétrica, caracterizando assim um terceiro estágio, chamado de fluência terciária, no qual a taxa de deformação volta a aumentar devido ao crescimento acelerado de microfissuras até a fratura do material.

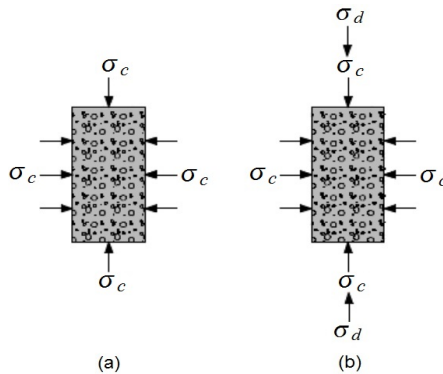


Figura 1.7: Tensões no corpo de prova em um ensaio triaxial de fluência. (a) corpo de prova sob tensão confinante; (b) aplicação da tensão diferencial – adaptado de Damin (2012).

Em corpos de prova sujeitos a tensões confinantes acima de 5 MPa, somente os regimes primário e secundário são evidenciados experimentalmente. A Fig. (1.9) ilustra o comportamento de fluência do sal em três diferentes níveis de tensão de confinamento. De acordo com Fredrich, Fossum e Hickman (2007), as curvas de fluência para tensões confinantes maiores do que 5 MPa são idênticas às conduzidas em 5 MPa.

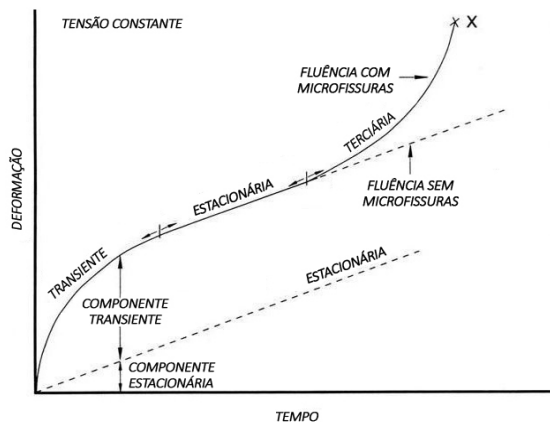


Figura 1.8: Comportamento clássico da deformação por fluência do sal (COUNCIL, 1996).

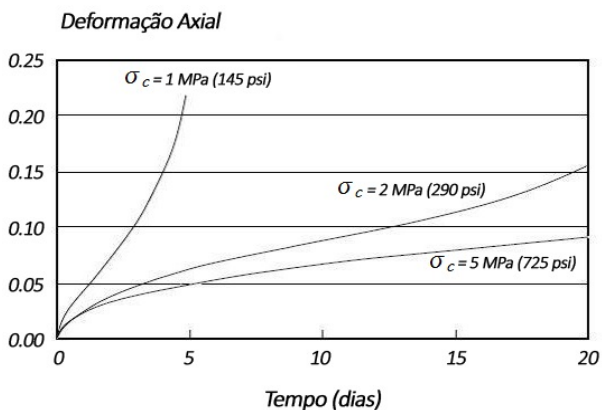


Figura 1.9: Comportamento de fluência do sal a 25°C para pressões confinantes de 1, 2 e 5 MPa (FOSSUM; FREDRICH, 2002).

1.3.7 Mecanismos de deformação por fluência – primária e secundária

No regime dúctil, a deformação inelástica do sal é isovolumétrica e decorre da geração e do movimento de discordâncias. Logo, o comportamento dúctil das rochas salinas é bastante similar ao de vários metais, envolvendo praticamente os mesmos mecanismos de deformação (YAHYA; AUBERTIN; JULIEN, 2000).

Na escala atômica são evidenciados processos físicos básicos que governam a deformação, o endurecimento e a recuperação das rochas salinas. Estes processos são denominados de mecanismos de deformação e são identificados através da observação microestrutural (FOSSUM; FREDRICH, 2002). O endurecimento durante a deformação resulta do acúmulo de discordâncias em obstáculos como contornos de grãos ou devido à interseção de discordâncias. Já a recuperação neutraliza o endurecimento e leva progressivamente a microestrutura a retornar a um estado virgem (YAHYA; AUBERTIN; JULIEN, 2000). A influência de um determinado mecanismo de deformação sobre o outro depende fortemente das condições de tensão e temperatura. Cada mecanismo é representado por uma equação constitutiva que especifica a deformação ou a taxa de deformação em função das condições impostas. Deste modo, a compreensão dos mecanismos de deformação das rochas salinas é essencial para a construção de equações constitutivas adequadas e para aplicações de engenharia.

Um diagrama tensão-temperatura que define a região em que cada mecanismo de deformação opera é denominado de mapa dos mecanismos de deformação. Estes mapas foram desenvolvidos para muitos materiais cristalinos, incluindo o sal. A Fig. 1.10 mostra o mapa dos mecanismos de deformação do sal, frequentemente citado, construído por Munson (1979). Neste diagrama, a temperatura homóloga ($T_{sal}/T_{m,sal}$), mostrada no eixo das ordenadas, expressa a razão entre a temperatura do material (T_{sal}) e a temperatura de fusão do mesmo ($T_{m,sal}$), sendo $T_{m,sal} = 1077$ K. O eixo das abscissas mostra a tensão normalizada (σ_d/μ_o), em que σ_d é a tensão diferencial e μ_o o módulo de cisalhamento. $d = 3$ mm é o diâmetro do grão de sal.

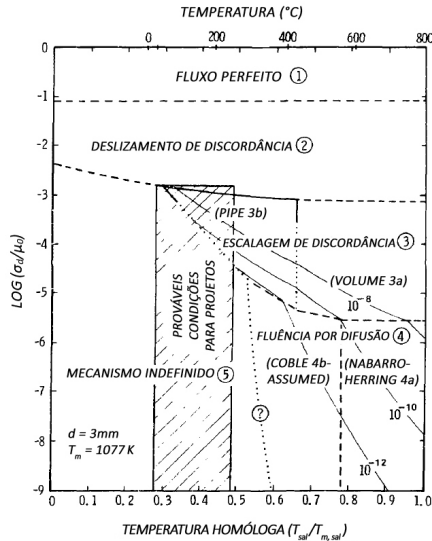


Figura 1.10: Mapa dos mecanismos de deformação do sal, (MUNSON, 1979).

O mapa ilustra na região destacada as prováveis condições mais relevantes para projetos de engenharia, tais como: minas convencionais, instalações para armazenamento, depósito de resíduos e poços de petróleo. Esta região engloba três mecanismos de deformação, os quais são: a) deslizamento de discordâncias (*dislocation glide*), no caso de altas tensões cisalhantes; b) escalagem de discordâncias (*dislocation climb*), no caso de altas temperaturas; e c) um mecanismo bem caracterizado experimentalmente porém indefinido (*undefined mechanism*), no caso de tensões cisalhantes e temperaturas mais baixas (MUNSON, 1979). Em geral, estes três mecanismos específicos de deformação no sal são devido ao movimento de discordâncias e, portanto, envolvidos em um único mecanismo de deformação também denominado de fluência por discordâncias (*dislocation creep*) (LOKEN; STATHAM, 1997). Segundo Costa et al. (2005), o mecanismo indefinido (*undefined mechanism*) foi identificado recentemente como mecanismo de solubilização sob pressão (*pressure solution*). Este ocorre nos contatos entre os grãos do sal sujeitos a altas tensões, provocando o aumento da solubilidade do material e assim sua dissolução. Informações adicionais sobre o mecanismo *pressure solution* são apresentadas em Meer et al. (2002) e Costa

e Poiate Jr. (2008). Maiores detalhes sobre os mecanismos de deformação por fluência mencionados acima são encontrados em Bresolin (2010) e Firme (2013).

Com base no mapa dos mecanismos de deformação, vários autores propuseram teorias constitutivas, como por exemplo, Munson e Dawson (1979) o modelo de Multimecanismos de Deformação, Aubertin, Yahya e Julien (1999) o modelo SUVIC e Costa et al. (2005) o modelo de Mecanismo Duplo.

Uma versão mais recente do mapa dos mecanismos de deformação do sal incluindo novos dados de fluência foi proposta por Munson e Dawson (1984). Outra versão, adaptada de Munson (1979), foi apresentado por Hansen (1987) *apud* Carter et al. (1993) para os estudos realizados no sal de Avery Island, no qual foi efetuado um pequeno ajuste para inclusão da região onde atua o mecanismo de escorregamento transversal de discordâncias em hélice (*cross-slip of screw dislocations*).

1.3.8 Comportamento frágil, semifrágil e dúctil

Segundo Aubertin, Sgaoula e Gill (1995), quando se trata de rochas é comum identificar três regimes inelásticos de deformação, chamados de regime frágil, dúctil e semifrágil. A localização dos limites entre os diferentes regimes pode depender das condições de carregamento, da temperatura e da taxa de deformação. O comportamento inelástico das rochas salinas é basicamente controlado por dois tipos de mecanismos de deformação: os envolvendo movimento de discordâncias e os associados à propagação de microfissuras (SGAOUA; AUBERTIN; GILL, 1995).

No regime dúctil, os mecanismos predominantemente viscoplásticos, geralmente associados ao movimento de discordâncias na estrutura cristalina, são responsáveis pelo endurecimento da rocha até um regime estacionário de deformação ser atingido, i.e., provocam a fluência primária conduzindo o material a fluência secundária, conforme já discutido na seção anterior. A deformação inelástica no regime dúctil é, portanto, essencialmente isocórica e independente da tensão de confinamento.

No regime frágil, os mecanismos associados ao microfissuramento são os que acarretam o enfraquecimento ou “amolecimento” do material devido à degradação progressiva das propriedades mecânicas, como por exemplo a diminuição do módulo de elasticidade. A deformação inelástica, neste regime, ocorre essencialmente devido à propagação de microfissuras. Entretanto, conforme Aubertin, Sgaoula e Gill (1995), em razão da suscetibilidade

à plasticidade intracristalina das rochas salinas, o comportamento puramente frágil, frequentemente verificado em rochas duras, é raramente observado nestas rochas.

Entre os regimes frágil e dútil existe um regime de transição, denominado de regime semifrágil, onde ambos os tipos de mecanismos de deformação estão ativos, em proporção que depende das condições de carregamento. Em um ensaio de compressão triaxial, a uma dada temperatura, a passagem do regime dútil para o regime semifrágil ocorre quando a tensão diferencial excede um determinado limite – chamado limiar de dano – a partir do qual as microfissuras tornam-se ativas. Abaixo deste limite, o comportamento mecânico da rocha salina é dútil e independente da tensão confinante. Acima, o comportamento da rocha torna-se semifrágil (SGAOULA; AUBERTIN; GILL, 1995). Neste regime, o microfissuramento produz alterações volumétricas inelásticas na rocha. Logo, ao contrário do fluxo plenamente viscoplástico, a deformação inelástica do material danificado pode provocar considerável aumento de volume (AUBERTIN; SGAOULA; GILL, 1995). Este aumento de volume, associado à fissuração, é denominado de dilatância.

1.3.9 Mecanismos de dano

Os mecanismos básicos de dano que podem ser consensualmente identificados a partir de observações experimentais em rochas salinas são o dano por cisalhamento e o dano por tração. O dano por cisalhamento está associado ao escorregamento das microfissuras e ao desencadeamento de fissuras em forma de asa nos extremos das microfissuras. Já, o dano por tração no sal ocorre na forma de microfissuras por clivagem alinhadas perpendicularmente à tensão de tração aplicada. De acordo com Chan et al. (1996), é necessário distinguir o dano por tração do dano por cisalhamento, pois a cinética do dano no sal é significativamente diferente sob cargas tratativas e cisalhantes.

Em ensaios triaxiais de fluência, o dano por fluência assemelha-se ao dano por cisalhamento. Porém, neste caso, torna-se dependente do tempo. Os estudos destes ensaios mostram que o processo de dano por fluência é dependente da tensão confinante e dilatacional. Tanto o aparecimento da fluência terciária quanto a ruptura por fluência podem ser adiados ou, ainda, contidos na presença de uma elevada tensão de confinamento (CHAN et al., 1996).

Durante a fluência em baixas tensões confinantes, as microfissuras pré existentes na rocha escorregam e propagam-se por cisalhamento, podendo, desenvolver fissuras em forma de asa (*wing-cracks*) nas extremidades (Fig. 1.11). A abertura destas fissuras conduz à dilatância. Chan et al. (1996), por

exemplo, consideram no modelo MDFC a componente deviatórica da taxa de deformação inelástica do dano produzida devido ao escorregamento de microfissuras e a componente volumétrica devido à abertura de microfissuras. Entretanto, sob altas tensões confinantes estas microfissuras podem ser fechadas em razão das altas tensões normais de compressão e do atrito atuando nas superfícies das microfissuras. Deste modo, a propagação destas, tanto por abertura quanto por escorregamento, é contida. Consequentemente, a contribuição inelástica da deformação por ação das microfissuras torna-se ausente e a deformação inelástica resulta dos mecanismos envolvendo o movimento de discordâncias, sendo, portanto, isocórica e independente da tensão de confinamento (CHAN et al., 1996).

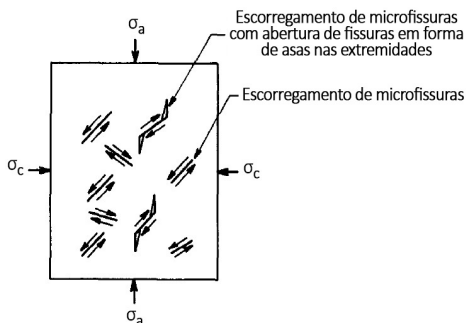


Figura 1.11: Desenvolvimento e abertura de microfissuras em uma amostra de sal submetida à baixa tensão confinante – adaptado de Chan et al. (1994).

Maiores detalhes sobre a física dos mecanismos de dano no sal podem ser encontrados nos trabalhos de Chan et al. (1994) e Chan, Fossum e Munson (1999). Mapas dos mecanismo de fratura do sal também foram construídos, conforme mostrado em Chan et al. (1996) e Chan et al. (1998), permitindo a identificação das regiões de operação dos mecanismos de fratura.

1.3.10 Modelos constitutivos de fluência de rochas salinas

Os modelos constitutivos aplicáveis na descrição do comportamento em fluência das rochas salinas podem ser classificados em três categorias, ou seja: empíricos, reológicos e baseados em mecanismos de deformação.

Os **modelos empíricos** provêm do ajuste, através de equações matemáticas, da curva dos resultados do ensaio, nos quais a comum suposição é

que a deformação depende apenas da tensão aplicada e da temperatura em um determinado momento. Dentre as leis empíricas da fluência é possível destacar as leis potenciais de Norton (1929) *apud* Munson e Wawersik (1991) e de Lomenick e Bradshaw (1969). Ambas foram desenvolvidas inicialmente para descrever o comportamento da fluência primária dos metais e estendidas, posteriormente, para a representação da fluência de rochas. A lei potencial de Norton, descreve a fluência estacionária e possui ampla utilização em modelos analíticos ou numéricos para a previsão comportamental de rochas (GRAVINA, 1997). Já a lei potencial de Lomenick e Bradshaw (1969) representa a fluência transiente, sendo a mais utilizada na literatura em virtude da simplicidade e do bom ajuste aos primeiros resultados obtidos da fluência (BOTELHO, 2008). Esta última foi adotada por Costa (1984) no projeto de painéis e galerias da mina Taquari-Vassouras e por Gravina (1997) para a simulação do fechamento de poços de petróleo em zonas de sal.

Existem também diversas outras leis empíricas na literatura, oriundas do estudo dos metais, que tentam representar o comportamento da fluência secundária. Estas relacionam a taxa de deformação em regime permanente com a tensão aplicada. Dentre estas leis encontram-se as leis: de Ludwik (1909), seno-hiperbólico de Nadai (1938) e de Eyrich (1956) (GRAVINA, 1997). De acordo com Costa (1984), a lei de Eyrich (1956) é a que possui maior aplicabilidade no estudo da fluência em cavernas de sal para armazenamento de resíduos nucleares. Mais exemplos de relações constitutivas uniaxiais para descrever as curvas padrão de fluência podem ser encontradas em Boyle e Spence (1983), Naumenko (2007) e Yao et al. (2007).

Os **modelos reológicos** são idealizados para representar fenomenologicamente o comportamento tensão-deformação no tempo macroscópico, adotando quatro elementos (mola, amortecedor, deslizante e ruptura; veja Yang (2000)) que emulam os aspectos básicos do comportamento dos sólidos. Adotando estes elementos em paralelo, em série ou realizando combinações diversificadas, e variando os parâmetros dos elementos, uma extensa parte do comportamento das rochas pode ser modelada (YANG, 2000).

Nesta classe ressalta-se o modelo reológico desenvolvido por Serata (1964) e o modelo constitutivo *Lubby2* proposto por Lux e Heusermann (1983) *apud* Munson e Wawersik (1991). O modelo reológico de Serata (1964) descreve a fluência transiente e estacionária e foi amplamente empregado em projetos de minas e cavernas de sal. Uma aplicação no projeto de minas profundas de potássio é apresentada em Serata (1968). A lei *Lubby2* é viscoelástica e baseada no modelo reológico de *Burgers*. Representa a fase transiente e estacionária da fluência. Esta apresenta duas versões

para a descrição da evolução da deformação por fluência primária. A primeira considera o método do endurecimento por deformação (*Strain Hardening*) e a segunda o método de endurecimento por tempo transcorrido (*Time Hardening*), detalhes sobre estes métodos são encontrados em Naumenko (2007). Esta lei foi desenvolvida com o intuito de simular o comportamento não linear de fluência das rochas salinas (HEUSERMANN; ROLFS; SCHMIDT, 2003). Heusermann, Rolfs e Schmidt (2003) utilizaram-na no projeto de cavernas de sal para fins de armazenamento.

Apesar de bastante práticos, segundo Costa e Poiate Jr. (2008), os modelos reológicos não exibem correspondência direta com o comportamento mecânico das rochas salinas, visto que desconsideram o efeito explícito da temperatura ou da estrutura intrínseca da rocha, e, sobretudo, não fornecem a compreensão essencial dos mecanismos físicos da fluência.

Os modelos com representação mais avançada da fluência, verificados na literatura, são os **baseados em mecanismos de deformação**, uma vez que descrevem o comportamento intrínseco das rochas salinas. Nesta classe, é possível enfatizar: a) o modelo de Multimecanismos de Deformação (*Multi-mechanism Deformation*, M-D) desenvolvido por Munson, Fossum e Senseny (1990), exhaustivamente empregado e validado no projeto da Planta Piloto de Isolamento de Rejeitos (*Waste Isolation Pilot Plant*, WIPP); b) o modelo de Mecanismo Duplo proposto por Costa et al. (2005), formulado com base em amostras de sal do Brasil tornando-o uma opção interessante para análise das rochas salinas da camada pré-sal brasileira; e c) o Modelo Composto (*Composite Model*, MC) apresentado em Weidinger et al. (1997), o qual possui grande avanço do ponto de vista físico e micromecânico.

O modelo viscoplástico de Multimecanismos de Deformação, formulada inicialmente por Munson e Dawson (1979), representa a fluência primária e estacionária das rochas salinas. Esta versão foi modificada no trabalho de Munson e Dawson (1982) e obteve a última atualização em Munson, Fossum e Senseny (1989) e Munson, Fossum e Senseny (1990). De modo geral, o modelo M-D é da classe “unificada”, uma vez que a plasticidade e a fluência são tratadas pela mesma variável, ou seja, pela taxa de deformação inelástica. Consequentemente, os critérios de escoamento e carga/descarga não são necessários para modelar o fluxo plástico (MUNSON, 1997). Algumas das aplicações deste modelo para a análise da fluência do sal em estruturas subterrâneas, com principal interesse no projeto de depósitos de rejeitos radioativos, podem ser encontradas nos trabalhos de Munson et al. (1992), Munson (1993), Munson, Weatherby e DeVries (1993) e Fossum e Munson (1996).

A lei constitutiva de fluência de Mecanismo Duplo de Deformação foi proposta por Costa et al. (2005) como uma simplificação da lei de fluência desenvolvida por Munson e Dawson (1979). Esta representa somente a fase secundária da fluência, considerando dois mecanismos de deformação. Algumas aplicações desta lei no projeto de poços petrolíferos encontram-se em Poiate Jr., Costa e Falcao (2006), Costa et al. (2010), Costa et al. (2011).

O Modelo Composto (MC), originalmente proposto por Mughrabi (1983), descreve a primeira e a segunda fase da fluência e foi aplicado no trabalho de Weidinger et al. (1997). Este, segundo Hunsche e Hampel (1999), é o mais avançado no aspecto físico e micromecânico, visto que a descrição da fluência é baseada em mecanismos físicos de deformação que atuam microscopicamente.

Outra classe de modelos de fluência do sal também desenvolvidos no contexto de uma teoria unificada, denominados de Plasticidade e Fluência Unificadas (*Unified Creep Plasticity*, UCP), foram propostos inicialmente por Krieg (1980) e Krieg (1982) para descrever a fase primária e secundária da fluência. Posteriormente, com base nesta abordagem, Aubertin, Gill e Ladanyi (1991) propuseram o modelo constitutivo SUVIC e Yahya, Aubertin e Julien (2000) apresentaram uma nova versão deste, chamando-o de SUVIC_{sh}⁴. Nesta classe de modelos nenhuma diferença é identificada entre a plasticidade e a fluência, ou seja, a componente de deformação inelástica é descrita por uma única lei cinética, considerando que os mesmos mecanismos controlam a componente plástica e de fluência da deformação inelástica (AUBERTIN; YAHYA; JULIEN, 1999).

Os modelos constitutivos de **fluência terciária** do sal são extensões das leis de fluência mencionadas anteriormente. Nestas, foi acoplada a fase terciária da fluência através da incorporação de teorias de falha e modelos de dano. Assim, além das fases iniciais da fluência, estes modelos, no geral, descrevem a fase terciária da fluência provocada pelo dano, a falha, o comportamento pós-falha e a redução das constantes elásticas conforme o grau de danificação do material.

Entre as leis reológicas da fluência ampliadas para representar a fluência terciária encontram-se o modelo viscoelastoplástico de Minkley et al. (2001), baseado em um critério de falha de *Mohr-Coulomb* modificado acoplado a um modelo reológico não linear de *Burgers*; o modelo de *Hou-Lux* (HOU, 2003), uma extensão do modelo *Lubby2* que utiliza uma variável escalar de dano; e o modelo de *Lux-Wolters* (WOLTERS; DÜSTERLOH., 2012), versão estendida do modelo constitutivo de *Hou-lux*.

⁴um acrônimo do modelo SUVIC com uma lei seno hiperbólico

Nas extensões das leis de fluência baseadas em mecanismos de deformação, que descrevem a fase terciária da fluência, destacam-se o modelo de Multimecanismos de Deformação Acoplado com Fratura (*Multi-mechanism Deformation Coupled Fracture*, MDFC) desenvolvido por Chan et al. (1992), o qual adota uma variável escalar de dano; e o modelo SUVI-D proposto por Aubertin, Sgaoula e Gill (1995), que emprega uma variável tensorial de dano de segunda ordem. Ambos utilizam o princípio da deformação equivalente, proposto por Lemaitre (1971), introduzindo a tensão efetiva nas equações constitutivas das deformações. As outras leis baseadas em mecanismos de deformação, ampliadas para representar a fluência terciária, admitem um limite de dilatância para estabelecer a falha no material. Dentre estes é possível enfatizar o modelo de Cristescu (1993), Günther, Salzer e Popp (2010) e o Modelo Composto com Dilatância (*Composite Dilatancy Model*, CDM) de Hampel e Schulze (2007). Nesta classe também verificou-se os modelos de Zhou et al. (2011) e Ma et al. (2013) ambos formulados dentro do contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis.

Adicionalmente aos fenômenos físicos referidos acima, os modelos de Chan et al. (1994), Chan et al. (1995) e Hou (2003) consideram a cicatrização do dano (*damage healing*), o modelo de Hampel e Schulze (2007) o efeito da umidade na deformação por fluência; e os modelos de Chan, Bodner e Munson (2001) e Lux-Wolters (WOLTERS; DÜSTERLOH., 2012) a cicatrização do dano e a variação da permeabilidade da rocha em razão do acréscimo ou decréscimo do dano.

No levantamento bibliográfico foi constatado que o comportamento frágil das rochas salinas ainda carece de modelos de dano elaborados com teorias de maior consistência e sofisticação. Isto conduziu a procura de modelos constitutivos de dano para outros materiais com comportamento similar ao do sal no regime frágil, como, por exemplo, modelos constitutivos de dano para geomateriais e concreto, com enfoque principal no contexto da mecânica dos meios contínuos.

Dentre os modelos de concreto encontrados destacam-se os modelos elastoplásticos com dano de Wu, Li e Faria (2006), Voyiadjis e Taqieddin (2009); e o modelo elastoviscoplastico com dano de Liu et al. (2011). Estes foram desenvolvidos dentro do contexto da mecânica dos meios contínuos. Para descrever a degradação das propriedades macromecânicas do concreto duas variáveis escalares de dano são adotadas, uma associada ao dano por tração e outra ao dano por cisalhamento. Estas variáveis conduzem a uma variável tensorial de dano de quarta ordem. Os critérios de dano, derivados do potencial de energia livre de *Helmholtz*, são baseados nas taxas de liberação

de energia de dano por tração e por compressão. A fim de considerar a resposta do material sob diferentes condições de carregamento e de reproduzir os distintos efeitos dos mecanismos de dano por tração e por cisalhamento é utilizado no modelo a decomposição do tensor tensão em uma componente positiva e outra negativa. Algumas aplicações do modelo de Voyiadjis e Taqieddin (2009) são mostradas em Taqieddin e Voyiadjis (2009).

Com relação a geomaterias pode-se mencionar os modelos de Shao, Chiarelli e Hoteit (1998), Chiarelli, Shao e Hoteit (2003), Salari et al. (2004) e Shao et al. (2006). Conforme Shao, Chiarelli e Hoteit (1998), em alguns materiais rochosos como argila ou xisto, ensaios laboratoriais mostram que a deformação plástica é frequentemente associada a degradação das propriedades mecânicas do material devido a formação e ao crescimento de microfissuras. Partindo deste princípio, Shao, Chiarelli e Hoteit (1998) propuseram, dentro do contexto da termodinâmica dos meios contínuos, um modelo elastoplástico com dano, considerando o acoplamento entre a deformação plástica e o dano proveniente das microfissuras. A influência do dano no fluxo plástico é descrita empregando o conceito de tensão efetiva e o princípio da deformação equivalente. Shao, Chiarelli e Hoteit (1998) adotam uma variável escalar de dano com evolução atrelada a deformação volumétrica dilatante. Nesta classe de modelos segue também o modelo elastoplástico com dano desenvolvido por Salari et al. (2004) para geomateriais, que considera o dano por tração – associado a deformação volumétrica expansiva – e os modelos de Chiarelli, Shao e Hoteit (2003), e Shao et al. (2006); extensões do modelo de Shao, Chiarelli e Hoteit (1998), desenvolvidos para análise de materiais semifrágeis como rochas sedimentares.

2 LEIS CONSTITUTIVAS PARA MEIOS CONTÍNUOS DANIFICADOS

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos da formulação adotada para resolver problemas relacionados a rochas salinas, ou seja, problemas de elastoviscoplasticidade com dano em grandes deformações. A formulação do modelo seguirá as seguintes considerações: uma descrição Lagrangiana Total; a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação; as equações constitutivas dadas em termos da medida logarítmica de deformação (modelo de *Hencky*), par conjugado do tensor tensão de *Kirchhoff* rotacionado; e uma teoria de dano não local.

O desenvolvimento da formulação é baseado na teoria proposta por Fremond e Nedjar (1996), que emprega o princípio das potências virtuais e a termodinâmica dos meios contínuos. Teoria também adotada com modificações no trabalho de Mascarenhas (2011), porém no contexto de pequenas deformações.

Quanto a degradação no material, conforme Fremond e Nedjar (1996), no interior do sólido existem movimentos microscópicos causadores do dano, então, a ideia básica da teoria é considerar a potência destes movimentos microscópicos incluindo seus efeitos na potência dos esforços internos. Assim, a velocidade das ligações microscópicas é relacionada à taxa de dano, enquanto as interações da velocidade das ligações são relacionadas ao gradiente da taxa de dano. Portanto, adota-se a potência dos esforços internos dependente da taxa de dano e do gradiente da taxa de dano. Desta premissa e do princípio das potências virtuais, chega-se a uma nova equação de evolução para a descrição da variável escalar de dano β . Esta formulação permite obter um modelo de dano não local menos sensível a malha de elementos finitos, em razão do gradiente de dano incorporar a dependência da vizinhança no processo de dano. Considera-se β como uma quantidade macroscópica de dano com valor zero (0) quando o material é íntegro e valor um (1) quando o material está completamente danificado. Esta variável é relacionada as ligações entre os pontos materiais e pode ser interpretada como uma medida do estado de coesão local do material.

A utilização da medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff* e da medida de deformação logarítmica, $\ln(\mathbf{U})$, foi primeiro descrita por Eterovic e Bathe (1990), Weber e Anand (1990), os quais admitiram estas medidas juntamente a um mapeamento exponencial, obtendo um algoritmo de mapeamento de retorno similar ao empregado em problemas de deformações infinitesimais. Este método de solução também foi investigado em Perić,

Owen e Honnor (1992), Simo (1992), Badrinarayanan e Zabaras (1996); e mais recentemente estudado e implementado nos trabalhos de Rossi (2005), Machado (2006) e De Deus (2008).

2.1 Decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação

A principal hipótese adotada na formulação elastoviscoplastica em grandes deformações apresentada aqui é a decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação \mathbf{F} no seguinte produto

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (2.1)$$

em que \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^p são, respectivamente, as partes elástica e viscoplastica de \mathbf{F} .

Esta hipótese supõe a existência de um estado local não tensionado, ou seja, livre de tensões, definido por \mathbf{F}^p . A Fig. 2.1 ilustra este estado, referenciado pelo índice ξ . Ademais, na Fig. 2.1, Ω_o representa a configuração de referência e Ω_t a configuração corrente ou atual.

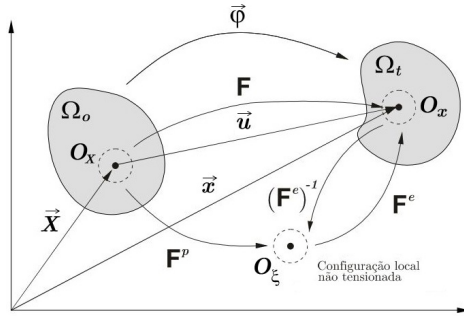


Figura 2.1: Cinemático do processo de deformação – adaptado de Machado (2006).

A função movimento/deformação $\vec{\varphi}$ que mapeia um ponto $\vec{X} \in \Omega_o$ em um ponto $\vec{x} \in \Omega_t$ é definida como

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) \equiv \vec{\varphi}_t(\vec{X}) \quad (2.2)$$

em que

$$\vec{\varphi}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t). \quad (2.3)$$

Desta forma, o gradiente de deformação é dado por

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) = \nabla_{\vec{X}} \vec{\phi}(\vec{X}, t). \quad (2.4)$$

2.1.1 Resultados da decomposição multiplicativa

A adoção da decomposição multiplicativa de \mathbf{F} produz alguns resultados importantes quanto a cinemática da deformação do corpo, os quais são apresentados a seguir.

O campo espacial denominado tensor gradiente de velocidade é definido como

$$\mathbf{L}(\vec{x}, t) = \nabla_{\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}, t) = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.5)$$

no qual $\vec{v}(\vec{x}, t)$ é a descrição espacial da velocidade, \mathbf{D} o tensor taxa de deformação correspondente à parte simétrica do gradiente da velocidade, $\mathbf{D} = \text{sym}(\mathbf{L})$, e \mathbf{W} o tensor taxa de rotação correspondente à parte anti-simétrica do gradiente de velocidade, $\mathbf{W} = \text{skew}(\mathbf{L})$. O tensor gradiente de velocidade pode ainda ser decomposto em uma parte elástica e outra viscoplástica da seguinte maneira

$$\mathbf{L}(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) = \dot{\mathbf{F}}(\vec{X}, t)\mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad (2.6)$$

com $\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e(\mathbf{F}^e)^{-1}$ e $\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p(\mathbf{F}^p)^{-1}(\mathbf{F}^e)^{-1}$.

O tensor taxa de deformação \mathbf{D} , parte simétrica de \mathbf{L} , pode ser decomposto como

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad (2.7)$$

em que

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2} [\mathbf{L}^e + (\mathbf{L}^e)^T] \quad (2.8)$$

e

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{2} [\mathbf{L}^p + (\mathbf{L}^p)^T]. \quad (2.9)$$

Uma condição imposta sobre as deformações é que ¹ (GURTIN, 1981; REDDY, 2008)

$$\det(\mathbf{F}) > 0,$$

o que implica em

$$\det(\mathbf{F}^e) > 0$$

¹ $\det(\mathbf{F}) = 1$ – deformações isocóricas.

e

$$\det(\mathbf{F}^p) > 0,$$

assegurando que \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^p sejam não singulares. Deste modo, cada um dos termos do gradiente da deformação admite decomposição polar, ou seja,

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p \quad (2.10)$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e, \quad (2.11)$$

sendo \mathbf{R}^p e $\mathbf{R}^e \in \text{ort}^+$ tensores ortogonais próprios e \mathbf{U}^p e \mathbf{U}^e tensores simétricos positivos definidos.

Ainda, é possível escrever

$$\mathbf{U}^e = \sqrt{\mathbf{C}^e}, \quad (2.12)$$

em que \mathbf{C}^e é o tensor deformação de *Cauchy-Green* à direita definido como

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e. \quad (2.13)$$

A medida de deformação adotada neste trabalho é a medida de deformação logarítmica²

$$\mathbf{E}^e = \ln(\mathbf{U}^e), \quad (2.14)$$

também conhecida como medida de deformação de *Hencky*. Esta foi proposto por Hencky (1933), com a finalidade de modelar borrachas vulcanizadas (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008).

2.1.2 Pares conjugados de tensão e deformação

Sabendo que o tensor tensão de *Kirchhoff* é fornecido por

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15)$$

sendo $J = \det(\mathbf{F}) = \frac{\rho_0}{\rho}$ a razão entre as densidades de massa das configurações de referência e atual, respectivamente, e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de *Cauchy*.

²Particularização da família Lagrangiana de deformações

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln[\mathbf{U}] & \text{para } m = 0. \end{cases}$$

Logo, conforme estabelecido por Hill (1978), os pares de tensão-deformação devem ser tais que a taxa de trabalho por unidade de massa $\dot{\mathcal{W}}$ seja invariante, isto conduz aos seguintes pares

$$\dot{\mathcal{W}} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\rho_o} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{\rho_o} \boldsymbol{\tau}_R \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (2.16)$$

em que \mathbf{P} é o primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK1)³, \mathbf{S} é o segundo tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* (PK2)⁴ e $\boldsymbol{\tau}_R$ é o tensor tensão rotacionado de *Kirchhoff*, dado por

$$\boldsymbol{\tau}_R = (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e. \quad (2.17)$$

O tensor \mathbf{C}^e , simétrico, admite decomposição espectral, isto é,

$$\mathbf{C}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \left(\vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right), \quad (2.18)$$

em que λ_i são os autovalores e \vec{l}_i são os autovetores de \mathbf{C}^e . Isto implica que \mathbf{U}^e possui os mesmos autovalores de \mathbf{C}^e , ou seja,

$$\mathbf{U}^e = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \left(\vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right). \quad (2.19)$$

Uma vez que $\ln(\mathbf{U}^e)$ é uma função tensorial isotrópica⁵, pode-se, portanto, reescrever a medida de deformação logarítmica na forma espectral do seguinte modo

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \left(\vec{l}_i \otimes \vec{l}_i \right). \quad (2.20)$$

2.2 Princípio das potências virtuais

O princípio das potências virtuais consiste em descrever os possíveis movimentos de um sistema mecânico, através de um espaço virtual, denominado “espaço dos movimentos virtuais”. Este princípio é baseado em dois axiomas (LEMAITRE; CHABOCHE, 1994): axioma da invariância das cargas internas e axioma do equilíbrio. O primeiro axioma enuncia que a potência

³O primeiro tensor de *Piola-Kirchhoff* é definido como $\mathbf{P} = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$.

⁴O segundo tensor de *Piola-Kirchhoff* é definido como $\mathbf{S} = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$.

⁵para detalhes ver de Souza Neto, Peric e Owen (2008) – Apêndices.

virtual das forças internas associada a um movimento de corpo rígido é nula, enquanto o segundo axioma expressa que a potência virtual das forças inerciais P_a é igual à soma da potência virtual das forças internas P_i e externas P_e . Isto posto, define-se as potências virtuais, para cada parte $v_t \subset \Omega_t$.

Considerando a abordagem apresentada por Fremond e Nedjar (1996), a potência das forças internas depende, não somente da taxa de deformação \mathbf{D} , mas também da velocidade das ligações microscópicas γ e do gradiente da velocidade das ligações $\vec{\nabla}\gamma$. Logo, supõe-se que a potência das forças internas é dada por

$$P_i(\vec{v}, \gamma) = - \int_{v_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}(\vec{v}) \, dv_t - \int_{v_t} \left(Y\gamma + \vec{H} \cdot \vec{\nabla}\gamma \right) dv_t \quad (2.21)$$

sendo \vec{v} o campo vetorial de velocidade, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor tensão de *Cauchy*, Y o trabalho interno do dano e \vec{H} o vetor fluxo de trabalho interno do dano.

Ademais, pressupõe-se que a potência das forças externas é fornecida da seguinte maneira

$$P_e(\vec{v}, \gamma) = \int_{v_t} \rho \vec{b} \cdot \vec{v} \, dv_t + \int_{\partial v_t} \vec{t} \cdot \vec{v} \, d\Gamma_t + \int_{v_t} A \gamma \, dv_t + \int_{\partial v_t} A_s \gamma \, d\Gamma_t \quad (2.22)$$

sendo ρ a densidade, \vec{b} a força de corpo prescrita por unidade de massa e \vec{t} a tração externa prescrita. A e A_s são as fontes volumétrica e superficial de trabalho do dano, respectivamente.

Por fim, admite-se que a potência das forças inerciais é expressa como

$$P_a(\vec{v}, \gamma) = \int_{v_t} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dv_t + \int_{v_t} \rho c_a \ddot{\beta} \gamma \, dv_t \quad (2.23)$$

sendo \vec{u} o campo de aceleração e $\rho c_a \ddot{\beta}$ as forças de aceleração das ligações microscópicas.

O princípio das potências virtuais afirma, para cada $v_t \subset \Omega$, que

$$P_i(\vec{v}, \gamma) + P_e(\vec{v}, \gamma) = P_a(\vec{v}, \gamma) \quad (2.24)$$

para todo (\vec{v}, γ) admissível.

Consequentemente, substituindo as Eqs. (2.21), (2.22) e (2.23) em (2.24); e uma vez que \vec{v} e γ são independentes, obtêm-se duas equações na forma forte, ou seja, a equação de equilíbrio de forças e a equação de equilíbrio do dano, como segue:

Equação de equilíbrio de forças

$$\operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}] + \rho \vec{b} = \rho \vec{u} \quad \text{em } \Omega_t \quad (2.25)$$

submetida às seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{t} & \text{em } \Gamma_t^v \\ \vec{u} = \vec{u} & \text{em } \Gamma_t^u \end{cases} \quad (2.26)$$

e às condições iniciais

$$\begin{cases} \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_o(\vec{x}) & \text{em } \Omega_t \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_o(\vec{x}) & \text{em } \Omega_t. \end{cases} \quad (2.27)$$

Equação de equilíbrio do dano

$$\operatorname{div} [\vec{H}] - Y + A = \rho c_a \ddot{\beta} \quad \text{em } \Omega_t \quad (2.28)$$

submetida à seguinte condição de contorno

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = A_s \quad \text{em } \Gamma_t \quad (2.29)$$

e às respectivas condições iniciais

$$\begin{cases} \dot{\beta}(\vec{x}, 0) = \hat{\alpha}_o & \text{em } \Omega_t \\ \beta(\vec{x}, 0) = \hat{\beta}_o & \text{em } \Omega_t. \end{cases} \quad (2.30)$$

Por simplicidade supõe-se que $A_s = 0$, resultando, portanto, na seguinte condição de contorno para a equação diferencial do dano

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_t. \quad (2.31)$$

2.2.1 Equações de equilíbrio na configuração de referência

Equivalentemente, pode-se expressar a Eq. (2.25) na configuração indeformada Ω_o em termos do primeiro tensor de *Piola-Kirchhoff* \mathbf{P} , da seguinte forma

$$\operatorname{div} [\mathbf{P}(\vec{X}, t)] + \rho_o(\vec{X}) \vec{b}_o(\vec{X}, t) = \rho_o(\vec{X}) \vec{u}(\vec{X}, t) \quad \text{em } \Omega_o \quad (2.32)$$

submetida às condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\vec{X}, t) \vec{N}(\vec{X}, t) = \vec{l}_o(\vec{X}, t) & \text{em } \Gamma_o^t \\ \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{\bar{u}}(\vec{X}, t) & \text{em } \Gamma_o^u \end{cases} \quad (2.33)$$

e às condições iniciais

$$\begin{cases} \vec{\dot{u}}(\vec{X}, 0) = \vec{v}_o(\vec{X}) & \text{em } \Omega_o \\ \vec{u}(\vec{X}, 0) = \vec{u}_o(\vec{X}) & \text{em } \Omega_o. \end{cases}$$

em que

$$\rho_o(\vec{X}) = J(\vec{X}, t) \rho(\vec{X}, t)$$

e

$$J(\vec{X}, t) = \det[\mathbf{F}(\vec{X}, t)]$$

com $\vec{b}_o(\vec{X}, t)$ e $\vec{u}(\vec{X}, t)$ sendo as descrições Lagrangeanas de $\vec{b}(\vec{x}, t)$ e $\vec{u}(\vec{x}, t)$, respectivamente.

Do mesmo modo, a Eq. (2.28) poder ser reescrita na configuração indeformada Ω_o , como

$$\text{div} [\vec{H}_o(\vec{X}, t)] - Y_o(\vec{X}, t) + A_o(\vec{X}, t) = \rho_o(\vec{X}) c_a \vec{\beta}(\vec{X}, t) \quad \text{em } \Omega_o \quad (2.34)$$

submetida à seguinte condição de contorno

$$\vec{H}_o(\vec{X}, t) \cdot \vec{N}(\vec{X}, t) = 0 \quad \text{em } \Gamma_o \quad (2.35)$$

e às respectivas condições iniciais

$$\begin{cases} \dot{\beta}(\vec{X}, 0) = \hat{\alpha}_o(\vec{X}) & \text{em } \Omega_o \\ \beta(\vec{X}, 0) = \hat{\beta}_o(\vec{X}) & \text{em } \Omega_o. \end{cases} \quad (2.36)$$

em que

$$\vec{H}_o(\vec{X}, t) = J(\vec{X}, t) \mathbf{F}^{-1}(\vec{X}, t) \vec{H}(\vec{X}, t), \quad (2.37)$$

$$Y_o(\vec{X}, t) = J(\vec{X}, t) Y(\vec{X}, t) \quad (2.38)$$

e

$$A_o(\vec{X}, t) = J(\vec{X}, t) A(\vec{X}, t) \quad (2.39)$$

com $A(\vec{X}, t)$, $Y(\vec{X}, t)$ e $\vec{H}(\vec{X}, t)$ representando as descrições Lagrangeanas de $A(\vec{x}, t)$, $Y(\vec{x}, t)$ e $\vec{H}(\vec{x}, t)$, respectivamente.

2.3 Leis da termodinâmica nos meios contínuos

2.3.1 Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica representa uma afirmação do princípio da conservação da energia para um sistema termodinâmico. Em um sistema termodinâmico, um corpo \mathcal{B} pode armazenar energia de duas formas: energia cinética (K_c) e energia interna (E_{int}), as quais representam a capacidade total que um sistema possui para realizar trabalho.

Formalmente, a primeira lei da termodinâmica pode ser enunciada como: “a taxa de variação da energia total do sistema (energia cinética e energia interna) é igual à potência das forças externas ($\hat{P}_{(e)}$) aplicada em \mathcal{B} , somado pelo fluxo de energia térmica (Q) que o sistema recebe ou dissipa”.

Matematicamente, esta lei pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} (K_c + E_{int}) = \hat{P}_{(e)} + Q. \quad (2.40)$$

Para obter a forma local da equação da conservação de energia, introduz-se a energia total do sistema, a qual poder ser decomposta do seguinte modo

$$E(v_t) = \int_{v_t} \rho e \, dv_t + \frac{1}{2} \int_{v_t} \rho \vec{u} \cdot \vec{u} \, dv_t + \frac{1}{2} \int_{v_t} \rho c_a \dot{\beta}^2 \, dv_t. \quad (2.41)$$

A equação global de balanço de energia (2.40), associada à $v_t \subset \Omega_t$, pode então ser reescrita como

$$\frac{dE(v_t)}{dt} = \hat{P}_{(e)} + Q \quad (2.42)$$

em que

$$\hat{P}_{(e)} = \int_{v_t} \rho \vec{b} \cdot \vec{u} \, dv_t + \int_{\partial v_t} \vec{t} \cdot \vec{u} \, d\Gamma + \int_{v_t} A \dot{\beta} \, dv_t + \int_{\partial v_t} A_s \dot{\beta} \, d\Gamma \quad (2.43)$$

e

$$Q = \int_{v_t} \rho r \, dv_t - \int_{\partial v_t} q \cdot \vec{n} \, d\Gamma_t. \quad (2.44)$$

Nestas equações, e é a energia interna específica, r a densidade volumétrica de produção de calor interno, \vec{q} o vetor fluxo de calor e \vec{n} o vetor externo unitário normal à superfície ∂v_t do corpo \mathcal{B} .

A partir da Eq. (2.42), visto que $v_t \subset \Omega_t$ é arbitrário, obtém-se

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}(\vec{u}) + Y \dot{\beta} + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \dot{\beta} + \rho r - \text{div}(\vec{q}) \quad (2.45)$$

que é a forma local da primeira lei da termodinâmica.

No caso de processos isotérmicos, sem fonte de calor, a Eq. (2.45) reduz-se a

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}(\vec{u}) + Y \dot{\beta} + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \dot{\beta}. \quad (2.46)$$

Na configuração de referência Ω_o , está lei (Eq. 2.45) pode ser expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} \rho_o(\vec{X}) \dot{e}(\vec{X}, t) &= \boldsymbol{\tau}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{D}(\vec{X}, t) + Y_o(\vec{X}, t) \dot{\beta}(\vec{X}, t) \\ &+ \vec{H}_o(\vec{X}, t) \cdot \nabla_{\vec{X}} \dot{\beta}(\vec{X}, t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.3.2 Segundo lei da termodinâmica

A segundo lei da termodinâmica enuncia que a taxa de produção de entropia, \dot{S} , em um corpo \mathcal{B} do sistema termodinâmico, é sempre superior ou igual à taxa de aquecimento dividido pela temperatura absoluta (T), ou seja,

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{v_t} \frac{\rho r}{T} \, dv_t - \int_{\partial v_t} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} \, d\Gamma_t. \quad (2.48)$$

Nesta equação, a produção de entropia é definida por

$$S = \int_{v_t} \rho s \, dv_t, \quad (2.49)$$

com s representando a entropia específica.

Aplicando o teorema da divergência em (2.48), sendo v_t arbitrário, é

possível obter a forma local da segunda lei da termodinâmica,

$$\rho \dot{s}T - \rho r + \operatorname{div}(\vec{q}) - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\nabla}T \geq 0. \quad (2.50)$$

Substituindo a primeira lei da termodinâmica expressa pela equação (2.45) em (2.50) determina-se a seguinte expressão

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + Y \dot{\beta} + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \dot{\beta} - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0. \quad (2.51)$$

Empregando o potencial de energia livre de *Helmholtz*, Ψ , definido mediante

$$\Psi = e - Ts \quad (2.52)$$

e introduzindo sua derivada temporal, $\dot{s}T - \dot{e} = -(\dot{\Psi} + \dot{T}s)$, em (2.51), chega-se a

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + Y \dot{\beta} + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \dot{\beta} - \rho (\dot{\Psi} + \dot{T}s) - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (2.53)$$

que é denominada de inequação de *Clausius-Duhem*, outra forma local da segunda lei da termodinâmica. Esta expressão demonstra que um processo termodinâmico é admissível se, e somente se, a dissipação total do sistema é positiva ou igual a zero.

Da mesma maneira, pode-se expressar a Eq. (2.53) na configuração indeformada Ω_o . No caso particular de processos isotérmicos está pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\vec{X}, t) \cdot \mathbf{D}(\vec{X}, t) + Y_o(\vec{X}, t) \dot{\beta}(\vec{X}, t) + \vec{H}_o(\vec{X}, t) \cdot \nabla_{\vec{X}} \dot{\beta}(\vec{X}, t) \\ - \rho_o(\vec{X}) \dot{\Psi}(\vec{X}, t) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.3.3 Restrição interna sobre a variável de dano

O valor da variável de dano, β , situa-se entre $[0, 1]$, i.e., $\beta \in [0, 1]$, com β visto como a proporção volumétrica de microvazios. Logo,

$$0 \leq \beta \leq 1. \quad (2.55)$$

A restrição interna sobre β é adotada como uma propriedade física de uma quantidade de estado. Logo, deve ser considerada pelas funções que descrevem as propriedades físicas, ou seja, pela energia livre Ψ ou pelo pseudo-

potencial de dissipação φ .

O potencial de energia livre $\Psi(\circ, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta)$ é definido somente para processos reais, ou seja, para processos tais que $\beta \in \mathbf{K}$, em que $\mathbf{K} = \left\{(\circ, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta) \mid 0 \leq \beta \leq 1\right\}$. Portanto, é possível também estender Ψ para processos onde $\beta \notin \mathbf{K}$, supondo que $\Psi(\circ, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta) = +\infty$ para $\beta \notin \mathbf{K}$. Além disso, supõe-se que Ψ seja localmente subdiferenciável em \mathbf{K} e tenha derivada material, a fim de que $\dot{\Psi}$ exista.

Dessa forma, é suposto a existência de um potencial de energia livre de *Helmholtz* dado por

$$\Psi(\circ, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta) = \Psi_o(\circ, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta) + I_{\mathbf{K}}(\beta) \quad (2.56)$$

em que (\circ) representa um conjunto de variáveis de estado, as quais serão definidas posteriormente, $\Psi_o(\circ, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta)$ é um potencial suave e $I_{\mathbf{K}}(\beta)$ é a função indicadora de \mathbf{K} , estabelecida como

$$I_{\mathbf{K}}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{if } \beta \in \mathbf{K} \\ +\infty, & \text{if } \beta \notin \mathbf{K}. \end{cases} \quad (2.57)$$

A função indicadora é responsável pela imposição da irreversibilidade do processo de dano. Assim, a energia livre possui um valor físico para qualquer valor real ou físico de β . No entanto, a energia livre é igual a $+\infty$ para qualquer valor fisicamente impossível de β , ou seja, para qualquer $\beta \notin \mathbf{K}$.

A determinação das derivadas da energia livre na evolução atual, ou seja, em uma evolução tal que $0 \leq \beta \leq 1$ para qualquer ponto $\vec{X} \in \Omega_o$ e qualquer instante t , permite definir as seguintes forças reversíveis e não-dissipativas relacionadas a β e $\vec{\nabla}\beta$:

$$Y_o^r = \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \beta} \quad (2.58)$$

e

$$\vec{H}_o^r = \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \vec{\nabla}_{\vec{X}}\beta}. \quad (2.59)$$

A restrição interna é considerada pela introdução de uma força de reação Y_o^{reac} que é definida admitindo a existência de uma função não suave

Y_o^{reac} tal que

$$\frac{1}{\rho_o} Y_o^{reac} (\vec{X}, t) \in \partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (\beta (\vec{X}, t)) \quad (2.60)$$

em que $\partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (\beta)$ é o subgradiente de $I_{\mathbf{K}} (\beta)$, dado como segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (\beta) = 0, \text{ if } 0 < \beta (\vec{X}, t) < 1 \\ \partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (0) = R^- \\ \partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (1) = R^+ \\ \partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (\beta) = \emptyset, \text{ if } \beta \notin \mathbf{K}. \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Pode-se perceber que a relação (2.61) implica que o subdiferencial $\partial^{loc} I_{\mathbf{K}} (\beta)$ não é vazio e, portanto, que a restrição interna é satisfeita. Também é possível mencionar que a relação (2.61) possui dois significados, ou seja: a restrição interna é satisfeita e existe uma reação à restrição interna que é zero para $0 < \beta < 1$, positiva para $\beta = 1$ e negativa para $\beta = 0$.

Ademais,

$$\frac{1}{\rho_o} (Y_o^r + Y_o^{reac}) \in \partial^{loc} \Psi \quad (2.62)$$

sendo Y_o^r e Y_o^{reac} as parcelas suave e não suave da força, respectivamente.

Se a função indicadora $I_{\mathbf{K}} (\beta)$ é aproximada por uma função suave, então é possível calcular uma aproximação de Y_o^{reac} simplesmente calculando a derivada clássica de uma função suave regularizada.

2.4 Método do estado local

O método do estado local pressupõe que o estado termodinâmico de um meio contínuo pode ser definido pelo conhecimento dos valores de um conjunto de variáveis, denominadas variáveis de estado local, definidas em um instante de tempo fixo (LEMAITRE; CHABOCHE, 1994). Esta hipótese implica que a evolução de um meio contínuo pode ser considerada como a sucessão de vários estados de equilíbrio. Deste modo, os fenômenos físicos podem ser descritos com uma precisão que depende da escolha da natureza e do número de variáveis de estado. Os processos definidos desta maneira serão termodinamicamente admissíveis se, e somente se, em qualquer instante t da evolução, a inequação de *Clausius-Duhem* for satisfeita. As variáveis de estado local, conforme Lemaitre e Lippmann (1996), são classificadas em variáveis observáveis e variáveis internas.

2.4.1 Variáveis observáveis

As variáveis observáveis que interagem dentro dos fenômenos da elasticidade, viscoelasticidade, plasticidade, viscoplasticidade e dano são a temperatura e a deformação total. Os fenômenos reversíveis ou elásticos dependem exclusivamente destas variáveis, em qualquer instante t (LEMAITRE; CHABOCHE, 1994).

2.4.2 Variáveis internas

Segundo a definição de Cauchy, um corpo elástico é aquele na qual a deformação em qualquer ponto do corpo é completamente determinada pela tensão e a temperatura que agem naquele ponto (LUBLINER, 1990). Então, uma definição óbvia de um corpo inelástico é aquela em que há algo mais, além da tensão e da temperatura, que determinam o nível de deformação de um ponto do corpo. Este “algo mais” pode ser cogitado como, por exemplo, a história da evolução da tensão e da temperatura no ponto. Um modo alternativo de representar este “algo mais” é considerar que o estado de deformação de um corpo não dependa exclusivamente da deformação total e da temperatura, mas também de um vetor de variáveis, V_k , $k = 1 \dots k$. Estas variáveis são denominadas de variáveis internas e, dependendo dos fenômenos envolvidos, podem representar campos escalares, vetoriais ou tensoriais.

Portanto, a fim de descrever os processos irreversíveis (dissipativos), pode-se introduzir um conjunto de variáveis internas, cujo objetivo é incorporar a história do carregamento na resposta final do material.

Dentre os processos dissipativos, por exemplo, estão a viscoplasticidade, o encruamento e o dano. Estes fenômenos exigem a introdução de variáveis internas que representem a deformação viscoplástica e o estado interno da matéria como a densidade de discordâncias e as microfissuras.

2.4.3 Potencial de energia livre de Helmholtz

Aqui, no contexto da termodinâmica dos processos irreversíveis, considera-se a existência de um potencial termodinâmico Ψ , denominado potencial de energia livre de *Helmholtz*, do qual são obtidas as equações de estado. Este potencial, Ψ , pode ser considerado dependente das seguintes variáveis de estado $(\mathbf{E}^e, V_k, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{x}}\beta)$. Portanto, supõe-se que

$$\Psi = \Psi_o \left(\mathbf{E}^e, V_k, \beta, \vec{\nabla}_{\vec{x}}\beta \right) + I_{\mathbf{K}}(\beta), \quad (2.63)$$

tendo como variação temporal

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi_o}{\partial \mathbf{E}^e} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \Psi_o}{\partial V_k} \dot{V}_k + \frac{\partial \Psi_o}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial \Psi_o}{\partial \vec{\nabla}_{\vec{X}} \beta} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{X}} \dot{\beta} + \frac{1}{\rho_o} Y_o^{reac} \dot{\beta}. \quad (2.64)$$

Da desigualdade de *Clausius-Duhem*, restrita a processos isotérmicos (2.54), e pela decomposição aditiva da taxa de deformação (2.7), é possível obter

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p) + Y_o \dot{\beta} + \vec{H}_o \cdot \nabla_{\vec{X}} \dot{\beta} - \rho_o \dot{\Psi} \geq 0. \quad (2.65)$$

Impondo a conservação da taxa de trabalho elástico, Hill (1978), tem-se

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^e = \boldsymbol{\tau}_R \cdot \dot{\mathbf{E}}^e \quad (2.66)$$

o que implica

$$\boldsymbol{\tau}_R \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p + Y_o \dot{\beta} + \vec{H}_o \cdot \nabla_{\vec{X}} \dot{\beta} - \rho_o \dot{\Psi} \geq 0. \quad (2.67)$$

Incluindo a taxa $\dot{\Psi}$ (Eq.(2.64)), a Eq.(2.67) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \left(\boldsymbol{\tau}_R - \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \mathbf{E}^e} \right) \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p + Y_o \dot{\beta} + \vec{H}_o \cdot \nabla_{\vec{X}} \dot{\beta} - Y_o^{reac} \dot{\beta} \\ & - \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \beta} \dot{\beta} - \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \vec{\nabla} \beta} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{X}} \dot{\beta} - \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial V_k} \dot{V}_k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Contudo, posto que a Eq.(2.68) deve ser satisfeita para todos os processos físicos admissíveis, chega-se a lei hiperelástica,

$$\boldsymbol{\tau}_R = \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \mathbf{E}^e}, \quad (2.69)$$

e as seguintes equações de estado:

$$A_k = \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial V_k} \quad (2.70)$$

$$Y_o^r = \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \beta} \quad (2.71)$$

$$\vec{H}_o^r = \rho_o \frac{\partial \Psi_o}{\partial \vec{\nabla}_{\vec{X}} \beta}. \quad (2.72)$$

Ainda, considerando

$$Y_o = Y_o^r + Y_o^{reac} + Y_o^i \quad (2.73)$$

e

$$\vec{H}_o = \vec{H}_o^r + \vec{H}_o^i \quad (2.74)$$

em que $\frac{1}{\rho_o} Y_o^{reac} \in \partial^{loc} I_{\mathbf{K}}(\beta)$, obtém-se a seguinte expressão para a energia de dissipação

$$\Delta = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p + Y_o^i \dot{\beta} + \vec{H}_o^i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0. \quad (2.75)$$

Por simplicidade, admite-se que não há dissipação com relação ao gradiente da taxa de dano, $\vec{\nabla} \dot{\beta}$. Como resultado, tem-se apenas os fenômenos dissipativos do tipo viscoso para a taxa de dano $\dot{\beta}$. Assim, $\vec{H}_o^i = 0$, fornecendo finalmente

$$\Delta = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0. \quad (2.76)$$

Nesta expressão, o termo $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}^p$ representa a energia dissipada por laço de histerese, $A_k \dot{V}_k$ representa a energia armazenada devido ao processo de endurecimento do material e $Y_o^i \dot{\beta}$ representa a energia dissipada devido ao processo de dano.

2.4.3.1 Taxa de deformação viscoplástica modificada

A modificação da taxa de deformação viscoplástica \mathbf{D}^p consiste, primeiro, em transportar o termo \mathbf{L}^p da Eq. (2.6) à configuração local não tensionada, através do seguinte produto

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{L}}^p &= (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{L}^p \mathbf{F}^e \\ &= \check{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} \end{aligned}$$

em que \mathbf{L}^p é parte viscoplástica do gradiente de velocidade \mathbf{L} escrita com relação à configuração local não tensionada.

Também é possível decompor $\check{\mathbf{L}}^p$ em uma parte simétrica $\check{\mathbf{D}}^p$, associada ao estiramento viscoplástico, e antissimétrica $\check{\mathbf{W}}^p$, associada à rotação viscoplástica, ou seja,

$$\check{\mathbf{L}}^p = \check{\mathbf{D}}^p + \check{\mathbf{W}}^p, \quad (2.77)$$

com

$$\check{\mathbf{D}}^p = \frac{1}{2} [\check{\mathbf{L}}^p + (\check{\mathbf{L}}^p)^T]$$

e

$$\check{\mathbf{W}}^p = \frac{1}{2} \left[\check{\mathbf{L}}^p - (\check{\mathbf{L}}^p)^T \right]. \quad (2.78)$$

Entretanto, considerado que o sólido elastoviscoplastico é isotrópico em cada configuração local não tencionada, o termo de rotação viscoplastica se torna nulo, i.e., irrotacional, (WEBER; ANAND, 1990; DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008), logo

$$\check{\mathbf{W}}^p = 0. \quad (2.79)$$

Assim, a dissipação, Eq.(2.76), poder ser reescrita da seguinte maneira

$$\Delta = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^e \check{\mathbf{D}}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0 \quad (2.80)$$

ou ⁶

$$\Delta = (\mathbf{F}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}^e)^{-T} \cdot \check{\mathbf{D}}^p + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0. \quad (2.81)$$

Ainda, substituindo a decomposição polar (Eq. 2.11) obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^{-T} \cdot \check{\mathbf{D}}^p + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0 \\ \Delta &= \mathbf{U}^e (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e)^{-1} \cdot \check{\mathbf{D}}^p + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0 \\ \Delta &= \mathbf{U}^e \boldsymbol{\tau}_R (\mathbf{U}^e)^{-1} \cdot \check{\mathbf{D}}^p + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0 \\ \Delta &= \boldsymbol{\tau}_R \cdot (\mathbf{U}^e)^{-1} \check{\mathbf{D}}^p \mathbf{U}^e + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Como a relação, Eq. (2.19), é isotrópica a inequação de *Clausius-Duhem* se torna

$$\Delta = \boldsymbol{\tau}_R \cdot \mathbf{D}_R^p + Y_o^i \dot{\beta} - A_k \dot{V}_k \geq 0. \quad (2.83)$$

2.4.4 Independência da dissipação viscoplastica e do dano

Neste trabalho, supõe-se que as dissipações viscoplastica e do dano, respectivamente, são independentes, ou seja,

$$\Delta^p = \boldsymbol{\tau}_R \cdot \mathbf{D}_R^p - A_k \dot{V}_k \geq 0 \quad (2.84)$$

e

$$\Delta^\beta = Y_o^i \dot{\beta} \geq 0. \quad (2.85)$$

Esta é uma condição suficiente para satisfazer a inequação de *Clausius-Duhem* (Eq. (2.76)).

⁶ $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{S}$

2.4.5 Potencial de dissipação

Para descrever os sistemas dissipativos e obter as equações de evolução das variáveis internas de um sistema termodinâmico, é preciso introduzir as equações complementares. Assim, supõe-se a existência de um pseudopotencial de dissipação $G^*(\circ)$, o qual é uma função contínua, positiva, convexa com relação as variáveis associadas $(\boldsymbol{\tau}_R, V_k)$ e nula na origem. Além disso, é pressuposto o desacoplamento entre as dissipações, de modo que o potencial possa ser expresso por

$$G^*(\circ) = G_{vp}^*(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ) + \varphi^*(Y_o^i; \circ)$$

em que G_{vp}^* é uma função diferenciável que descreve a dissipação viscoplástica e φ^* uma função não diferenciável que representa a dissipação do dano.

Posto isto, aplicando o critério de dissipação normal, determina-se as seguintes equação de evolução:

$$\mathbf{D}_R^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial G_{vp}^*(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ)}{\partial \boldsymbol{\tau}_R}, \quad (2.86)$$

$$\dot{V}_k = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial G_{vp}^*(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ)}{\partial A_k}, \quad (2.87)$$

e

$$\dot{\beta} \in \partial \varphi^*(Y_o^i; \circ) \quad (2.88)$$

em que

$$\dot{\lambda}_p = \begin{cases} \mathfrak{S}_p^*(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ), & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ) < 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

é denominado de multiplicador viscoplástico, especificado por uma equação constitutiva que satisfaz a relação $\dot{\lambda}_p \geq 0$; $f(\boldsymbol{\tau}_R, V_k; \circ)$ representa a função de escoamento e (\circ) o conjunto $(\mathbf{E}^e, A_k, \beta)$. As Eqs. (2.86) e (2.88) representam, respectivamente, as equações de evolução da deformação viscoplástica e do dano, enquanto a Eq. (2.87) representa a evolução de um conjunto de variáveis relacionadas a deformação viscoplástica acumulada (endurecimento), visto que $V_k, k = 1 \dots k$.

3 MODELO ELASTOVISCOPLÁSTICO COM DANO NÃO LOCAL PARA ROCHAS SALINAS

Neste capítulo é apresentado o modelo elastoviscoplastico com dano não local para a análise do comportamento dúctil e frágil de rochas salinas, desenvolvido conforme a teoria geral abordada no Capítulo 2.

Para o desenvolvimento do modelo constitutivo é introduzido: o potencial de energia livre de *Helmholtz*, do qual deriva-se as equações de estado; a função de escoamento, que permite a definição do domínio elástico; o potencial de dissipação e o potencial de dano, que fornecem, mediante a aplicação do critério de dissipação normal, as leis complementares ou leis de evolução necessárias para a descrição dos processos irreversíveis. Por simplicidade, considera-se o processo de deformação das rochas salinas isotérmico e adota-se uma lei de encruamento isotrópica, restringindo o modelo proposto exclusivamente a carregamentos monotônicos.

3.1 Definição do potencial de energia livre

Seguindo as ideias de Fremond e Nedjar (1996) e Salari et al. (2004), considera-se o potencial de energia livre Ψ_o decomposto da seguinte maneira

$$\Psi_o = \Psi_o^e(\mathbf{E}^e, \beta) + \Psi_o^p(\mathbf{E}^e, V_k, \beta) + \Psi_o^g(\nabla_{\bar{x}}\beta) \quad (3.1)$$

sendo $\Psi_o^e(\mathbf{E}^e, \beta)$ a parcela elástica do potencial de energia livre, $\Psi_o^p(\mathbf{E}^e, V_k, \beta)$ a parcela viscoplastica e $\Psi_o^g(\nabla_{\bar{x}}\beta)$ a parcela associada ao processo de dano não local.

A parcela elástica do potencial de energia livre $\Psi_o^e(\mathbf{E}^e, \beta)$ é definida como

$$\rho_o \Psi_o^e(\mathbf{E}^e, \beta) = \frac{1}{2} (1 - \beta) \mathbb{D} \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^e, \quad (3.2)$$

na qual \mathbb{D} , o tensor constitutivo elástico de quarta ordem, é dado por

$$\mathbb{D} = 2\mu_o \mathbb{I} + \lambda_o (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (3.3)$$

com μ_o e λ_o representando as constantes *Lamé*, \mathbb{I} o tensor identidade de quarta ordem¹ e \mathbf{I} o tensor identidade de segunda ordem, i.e.,

$$\mathbb{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_r \otimes \vec{e}_s) \quad (3.4)$$

¹ \mathbb{I} é o tensor identidade somente em relação a tensores simétricos.

e

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j), \quad (3.5)$$

as constantes de *Lamé*, relacionadas ao módulo de *Young* E e ao coeficiente de *Poisson* ν , são fornecidas por

$$\mu_o = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.6)$$

e

$$\lambda_o = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (3.7)$$

Considerando apenas uma variável interna, que incorpora o encruamento isotrópico, tem-se o caso particular no qual $k = 1$, assim, $\Psi_o^p(\mathbf{E}^e, V_k, \beta) = \Psi_o^p(\mathbf{E}^e, V_1, \beta)$. Definindo $V_1 = \kappa$, propõem-se a subsequente expressão para a parte viscoplastica do potencial de energia livre

$$\rho_o \Psi_o^p(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) = (1 - \beta) \rho_o \Psi_{ov}^p(\mathbf{E}^e, \kappa) \quad (3.8)$$

em que

$$\begin{aligned} \rho_o \Psi_{ov}^p(\mathbf{E}^e, \kappa) &= \int_0^t \langle \bar{\tau}_R \cdot \mathbf{D}_R^p \rangle_{vol}^+ dt \\ &= \int_0^t \left\{ \langle \bar{\tau}_{RH} \rangle^+ \langle \dot{\epsilon}_{vol}^p \rangle^+ + \langle -\bar{\tau}_{RH} \rangle^+ \langle -\dot{\epsilon}_{vol}^p \rangle^+ \right\} dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

é a parte volumétrica positiva da potência de deformação viscoplastica dissipada, sendo $\dot{\epsilon}_{vol}^p = tr[\mathbf{D}_R^p]$ e $\bar{\tau}_{RH} = \frac{1}{3} tr[\bar{\tau}_R]$ a taxa de deformação viscoplastica volumétrica e parte hidrostática do tensor tensão rotacionado efetivo de *Kirchhoff*, respectivamente. A Eq. (3.9) também pode ser reescrita como

$$\rho_o \Psi_{ov}^p(\mathbf{E}^e, \kappa) = \int_0^\kappa \left\{ \langle \bar{\tau}_{RH} \rangle^+ \left\langle \frac{d \epsilon_{vol}^p(\bar{\xi})}{d \bar{\xi}} \right\rangle^+ + \langle -\bar{\tau}_{RH} \rangle^+ \left\langle -\frac{d \epsilon_{vol}^p(\bar{\xi})}{d \bar{\xi}} \right\rangle^+ \right\} d \bar{\xi} \quad (3.10)$$

com $\bar{\xi}$ descrevendo a dependência de κ em $\epsilon_{vol}^p(\circ)$ e $\langle \circ \rangle^+$ denotando a parte positiva de (\circ) – operador de *Macaulay*².

²A notação $\langle f(x) \rangle^+$, conhecido como operador de *Macaulay*, aplicada a uma função $f(x)$, representa a parte positiva da função. A definição matemática é dada por

$$\langle f(x) \rangle^+ = \max \{0, f(x)\} = \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{se } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

A parcela associada ao processo de dano não local do potencial de energia livre é definida por

$$\rho_o \Psi_o^g(\nabla_{\vec{x}} \beta) = \frac{1}{2} k_o^g \vec{\nabla}_{\vec{x}} \beta \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \beta, \quad (3.11)$$

este termo da energia livre é responsável por incorporar o efeito não local do dano – ao introduzir a dependência da vizinhança. O parâmetro k_o^g , proposto por Fremond e Nedjar (1996), controla a intensidade do dano. Se $k_o^g \rightarrow 0$, a teoria não local, reduz-se no limite, a teoria clássica de dano local.

3.1.1 Regularização do Potencial de energia livre Helmholtz

Com o propósito de evitar o problema da não-diferenciabilidade do potencial de energia livre de *Helmholtz* (Eq. (2.56)), de modo que seja possível aplicar algoritmos de solução tradicionais, emprega-se um processo de regularização. O potencial de energia livre de *Helmholtz* regularizado, $\Psi_{\bar{\eta}\alpha}(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta, \vec{\nabla} \beta)$, é tal que

$$\lim_{\bar{\eta}\alpha \rightarrow 0} \Psi_{\bar{\eta}\alpha}(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta, \vec{\nabla} \beta) = \Psi(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta, \vec{\nabla} \beta). \quad (3.12)$$

Visto que Ψ_o é uma função suave, requer-se a regularização somente da função indicadora do conjunto \mathbf{K} , dada por $I_K(\beta)$. Esta expressão é regularizada mediante a aplicação de um método de penalidade exterior. Deste modo, considera-se uma aproximação diferenciável $I_K^{\bar{\eta}\alpha}(\beta)$ de maneira que

$$\lim_{\bar{\eta}\alpha \rightarrow 0} I_K^{\bar{\eta}\alpha}(\beta) = I_K(\beta). \quad (3.13)$$

Para construir $I_K^{\bar{\eta}\alpha}(\beta)$, representa-se o domínio viável, \mathbf{K} , por restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} g_1(\beta) &= -\beta \leq 0, \\ g_2(\beta) &= \beta - 1 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A função regularizada $I_K^{\bar{\eta}\alpha}(\beta)$ pode ser obtida como

$$\rho_o I_K^{\bar{\eta}\alpha}(\beta) = P(g_1(\beta)) + P(g_2(\beta)) \quad (3.15)$$

em que

$$P(g_i(\beta)) = \frac{1}{2\bar{\eta}_\alpha} (\langle g_i(\beta) \rangle^+)^2 \quad (3.16)$$

é um tipo de função de penalidade exterior (regularização), definida de maneira que no limite represente a função indicadora do conjunto \mathbf{K} , e $\bar{\eta}_\alpha$ é um parâmetro de penalidade adequado.

Logo, da Eq. (3.15), tem-se

$$\rho_o I_K^{\bar{\eta}_\alpha}(\beta) = \frac{1}{2\bar{\eta}_\alpha} \left\{ (\langle -\beta \rangle^+)^2 + (\langle \beta - 1 \rangle^+)^2 \right\}, \quad (3.17)$$

que proporciona a seguinte expressão regularizada para a energia livre de Helmholtz

$$\begin{aligned} \rho_o \Psi_{\bar{\eta}_\alpha}(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta, \vec{\nabla} \beta) &= \rho_o \Psi_o(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta, \vec{\nabla}_{\bar{\chi}} \beta) \\ &+ \frac{1}{2\bar{\eta}_\alpha} \left\{ (\langle -\beta \rangle^+)^2 + (\langle \beta - 1 \rangle^+)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2 Derivação das equações de estado

Como resultado da inequação de *Clausius-Duhem* (Eq. (2.68)) obteve-se as equações de estado, definidas nas Eqs. (2.69) - (2.72), as quais são fornecidas pelas relações descritas a seguir.

3.2.1 Relação constitutiva hiperelástica

Da Eq. (2.69) obtém-se a relação constitutiva hiperelástica

$$\boldsymbol{\tau}_R = (1 - \beta) \mathbb{D} \mathbf{E}^e. \quad (3.19)$$

Definindo o tensor tensão rotacionado efetivo de *Kirchhoff* como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_R = \frac{\boldsymbol{\tau}_R}{(1 - \beta)} \quad (3.20)$$

é possível reescrever esta relação do seguinte modo

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_R = \mathbb{D} \mathbf{E}^e. \quad (3.21)$$

Além disso, pode-se perceber que a parte hidrostática de $\bar{\boldsymbol{\tau}}_R$ é dada por

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\tau}}_{RH} &= \frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\tau}}_R] \\ &= k_o \boldsymbol{\varepsilon}_{vol}^e\end{aligned}\quad (3.22)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}^e = \text{tr}[\mathbf{E}^e]$ é a deformação elástica volumétrica e $k_o = \frac{2\mu_o + 3\lambda_o}{3}$ é o módulo volumétrico.

3.2.2 Força termodinâmica associada ao encruamento

A partir da Eq. (2.70), considerando $k = 1$ e definindo $A_1 = K$, chega-se a força termodinâmica associada ao encruamento

$$K = \rho_o \frac{\partial \Psi_o^p(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)}{\partial \kappa} \quad (3.23)$$

implicando que

$$K = K(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta). \quad (3.24)$$

3.2.3 Forças termodinâmicas associadas ao dano

Da Eq. (2.71) obtém-se a força termodinâmica relacionada ao dano

$$Y_o^r = -\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_R \cdot \mathbf{E}^e - \rho_o \Psi_{ov}^p(\kappa) \quad (3.25)$$

com $\rho_o \Psi_{ov}^p(\kappa)$ definido em (3.10).

Em virtude do processo de regularização da energia livre de *Helmholtz* é possível aproximar Y_o^{reac} como segue

$$\begin{aligned}Y_o^{reac} &= \frac{\partial \rho_o I_K^{\bar{\eta}_\alpha}(\beta)}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{\bar{\eta}_\alpha} \{ -\langle -\beta \rangle^+ + \langle \beta - 1 \rangle^+ \}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

O valor real de Y_o^{reac} é somente obtido quando $\bar{\eta}_\alpha \rightarrow 0$. Entretanto, observa-se que, na prática, o limite não é tomado. Então, neste trabalho utiliza-se um valor positivo suficientemente pequeno para $\bar{\eta}_\alpha$ — $\bar{\eta}_\alpha \in [10^{-6}, 10^{-12}]$.

3.2.4 Força termodinâmica associada a influência do dano na vizinhança

Finalmente da Eq. (2.72) chega-se a força termodinâmica relacionada a influência do dano na vizinhança

$$\vec{H}_o = \vec{H}_o^r = k_o^g \nabla_{\vec{x}} \vec{\beta}. \quad (3.27)$$

3.3 Definição da função de escoamento

Por motivo de simplicidade, o critério de *Drucker-Prager*, sensível à pressão hidrostática, é adotado para descrever a resposta do comportamento viscoplastico de rochas salinas. Este critério, proposto por Druker e Prager em 1952 como uma aproximação suave para a lei de *Mohr-Coulomb* (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008), foi modificado para incluir o efeito do dano na resistência coesiva das rochas. A expressão é dada por

$$f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) = \eta \bar{p} + \bar{q} - \xi c(K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) \quad (3.28)$$

em que

$$\bar{q} = \left[\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

é a raiz quadrada do segundo invariante do tensor tensão deviatórico efetivo rotacionado de *Kirchhoff* ($\bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D$), $\bar{p} = \bar{\tau}_{RH}$ denota a parte hidrostática do tensor tensão efetivo rotacionado de *Kirchhoff* (Eq. (3.22)), κ é a variável interna associada a deformação viscoplastica (encruamento) e β o parâmetro de dano escalar. O termo $c(K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa)$ representa a coesão real, o qual será definido posteriormente, e os parâmetros η e ξ são escolhidos de acordo com a aproximação requerida para o critério de *Mohr-Coloumb*.

Observa-se que a coesão $c(K; \circ)$ é uma função de K cujos coeficientes podem depender de $(\circ) \equiv (\mathbf{E}^e, \beta, \kappa)$. Além disso, da Eq. (3.19) verifica-se que os coeficientes de $c(K; \circ)$ podem ser modificados indiretamente, caso necessário, variando a medida de tensão $\boldsymbol{\tau}_R$. Porém, neste trabalho, $c(K; \circ)$ será tratado como independente de $\boldsymbol{\tau}_R$.

Diante da definição de \bar{q} , a tensão equivalente efetiva do tipo *von Mises* $\bar{\tau}_{eq}^{vm}$ dada por

$$\bar{\tau}_{eq}^{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D} \quad (3.30)$$

pode ser redigida como

$$\bar{\tau}_{eq}^{vm} = \sqrt{3} \bar{q}. \quad (3.31)$$

O potencial de fluxo de *Druker-Prager* é representado por um cone cujo eixo é a linha hidrostática. A aproximação comumente adotada é coincidir o potencial de fluxo de *Druker-Prager* com as arestas externas ou internas da superfície de *Mohr-Coloumb*. As arestas externas coincidem quando

$$\eta = \frac{6 \sin(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{6 \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))}. \quad (3.32)$$

Enquanto, as arestas internas coincidem pela escolha de

$$\eta = \frac{6 \sin(\phi)}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{6 \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 + \sin(\phi))}. \quad (3.33)$$

Nas equações acima ϕ representa o ângulo de atrito interno do critério de *Mohr-Coloumb*, mais informações constam em de Souza Neto, Peric e Owen (2008).

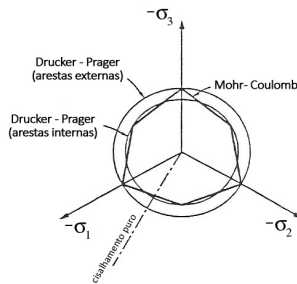


Figura 3.1: Seção do plano π da superfície de escoamento de *Mohr-Coloumb* e as aproximações de *Druker-Prager* (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008).

O cone externo e o cone interno são conhecidos, respectivamente, como cone de compressão e cone de extensão. A seção do plano π de ambas as superfícies está mostrada na Fig. 3.1. Para todos estes conjuntos de parâmetros, o vértice da aproximação do cone de *Druker-Prager* coincide com o vértice da correspondente superfície do potencial de fluxo de *Mohr-Coloumb*.

3.4 Definição das equações complementares

3.4.1 Definição do potencial de dissipação viscoplastico

Para descrever os processos dissipativos associados à viscoplasticidade e caracterizar completamente o modelo viscoplastico proposto, definindo as leis de evolução para as variáveis internas, supõe-se a existência de um pseudopotencial de dissipação, $G_{vp}^*(\boldsymbol{\tau}_R, K; \circ)$ – função escalar contínua, convexa com relação as variáveis duais $(\boldsymbol{\tau}_R, K)$ e nula na origem –, que satisfaz automaticamente a inequação de *Clausius-Duhem* (Eq. (2.84)). Desta forma, adotando uma regra de fluxo não associativa – $G_{vp}^*(\boldsymbol{\tau}_R, K; \circ) \neq f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \circ)$ – para determinar a direção da taxa de deformação viscoplastica, define-se a seguinte função de *Drucker-Prager* modificada como potencial viscoplastico

$$G_{vp}^*(\boldsymbol{\tau}_R, K; \circ) = \vartheta \bar{p} + \bar{q} - c_o(K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) \quad (3.34)$$

em que $c_o(K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa)$ é uma constante material e ϑ o parâmetro de dilatância, com valor maior que zero, i.e., $\vartheta > 0$, utilizado para controlar a deformação volumétrica inelástica expansiva.

Substituindo o potencial viscoplastico proposto na Eq. (2.86), obtém-se

$$\mathbf{D}_R^p = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1 - \beta)} \left(\frac{\vartheta}{3} \mathbf{I} + \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D}{2\bar{q}} \right). \quad (3.35)$$

Então, da decomposição da taxa de deformação viscoplastica rotacionada,

$$\mathbf{D}_R^p = \mathbf{D}_R^{pD} + \dot{\epsilon}_H^p \mathbf{I}, \quad (3.36)$$

é possível determinar:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{vol}^p &= tr[\mathbf{D}_R^p] \\ &= \frac{\dot{\lambda}_p}{(1 - \beta)} \vartheta, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_H^p &= \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{vol}^p \\ &= \frac{\dot{\lambda}_p}{3(1 - \beta)} \vartheta, \end{aligned} \quad (3.38)$$

e

$$\mathbf{D}_R^{pD} = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D}{2\bar{q}} \quad (3.39)$$

sendo $\dot{\epsilon}_{vol}^p$ a taxa de deformação viscoplástica volumétrica, $\dot{\epsilon}_H^p$ a parte hidrostática da taxa de deformação viscoplástica rotacionada e \mathbf{D}_R^{pD} a parte deviatórica da taxa de deformação viscoplástica rotacionada.

Similarmente, a evolução do endurecimento isotrópico, definida como $\dot{V}_1 = \dot{\kappa}$ quando $k = 1$, é obtida, substituindo o potencial (3.34) na Eq. (2.87), resultando

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial}{\partial K} \{c_o(K; \circ)\} \dot{\lambda}_p. \quad (3.40)$$

Neste ponto, visando definir a taxa de deformação viscoplástica efetiva, $\dot{\epsilon}_{ef}^p$, cuja equação de evolução define a evolução do multiplicador viscoplástico $\dot{\lambda}_p$, é necessário estabelecer uma medida de tensão efetiva, $\bar{\tau}_{ef}$, a qual é suposta, neste trabalho, como

$$\bar{\tau}_{ef} = \bar{q} + \vartheta \bar{p}. \quad (3.41)$$

Seguindo as ideias citadas por Goldberg, Roberts e Gilat (2003), para a determinação da taxa de deformação inelástica efetiva, $\dot{\epsilon}_{ef}^p$, aplica-se o princípio da equivalência da taxa de trabalho inelástico. A taxa de trabalho inelástico efetivo, $\dot{\omega}^p$, é definida por

$$\dot{\omega}^p = \bar{\boldsymbol{\tau}}_R \cdot \mathbf{D}_R^p = \bar{\tau}_{ef} \dot{\epsilon}_{ef}^p, \quad (3.42)$$

permitindo concluir que

$$\dot{\epsilon}_{ef}^p = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)}. \quad (3.43)$$

3.4.2 Modelos constitutivos de fluência das rochas salinas

Para a descrição da evolução da deformação viscoplástica efetiva $\dot{\epsilon}_{ef}^p$ adota-se, como opção, dois modelos constitutivos de fluência do sal. O modelo de Multimecanismos de Deformação (*Multi-mechanism Deformation*, M-D), desenvolvido por Munson, Fossum e Senseny (1990), ou o modelo de Mecanismo Duplo de Deformação, proposto por Costa et al. (2005). Este último, o qual representa somente a fluência estacionária, é proposto, aqui, utilizando a função transiente do modelo M-D, tornando-o adequado a caracterizar, também, a fluência transiente do sal. Nestes modelos, o processo

de deformação por fluência estacionária é baseado no mapa dos mecanismos de deformação do sal (Fig. 1.10) construído por Munson (1979). O mapa ilustra as regiões mais relevantes para projetos de engenharia. Estes modelos matemáticos são apresentados abaixo como segue.

3.4.2.1 Modelo de multimecanismos de deformação (M-D)

A equação constitutiva da lei de fluência que incorpora todas as parcelas referentes aos mecanismos de deformação presentes na região destacada da Fig. 1.10 é a de Multimecanismos de Deformação desenvolvida por Munson, Fossum e Senseny (1990). Neste modelo, a taxa de fluência em regime estacionário, descrita pela taxa de deformação viscoplastica efetiva em regime estacionário, $\dot{\epsilon}_{ef(s)}^p$, pode ser expressa como a soma das taxas destes mecanismos, $\dot{\epsilon}_{ef(s_i)}^p$, agindo em paralelo, ou seja,

$$\dot{\epsilon}_{ef(s)}^p = \sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_{ef(s_i)}^p, \quad (3.44)$$

sendo as taxas destes mecanismos individuais da fluência em regime estacionário fornecidas pela seguintes expressões:

$$\dot{\epsilon}_{ef(s_1)}^p = A_1 \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^{n_1}, \quad (3.45)$$

$$\dot{\epsilon}_{ef(s_2)}^p = A_2 \exp \left\{ \frac{-Q_2}{RT} \right\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^{n_2} \quad (3.46)$$

e

$$\dot{\epsilon}_{ef(s_3)}^p = H \left(\bar{\tau}_{eq}^{vm} - \tau_d \right) \left[B_1 \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} + B_2 \exp \left\{ \frac{-Q_2}{RT} \right\} \right] \sinh \left[\frac{d_o (\bar{\tau}_{eq}^{vm} - \tau_d)}{\mu_o} \right]. \quad (3.47)$$

Nas relações acima, A_1, A_2, B_1, B_2 são constantes materiais, Q_1 e Q_2 são as energias de ativação do mecanismo, T é a temperatura absoluta, R é a constante universal dos gases, μ_o é o módulo de cisalhamento, n_1 e n_2 são os expoentes de tensão, d_o é uma constante material, τ_d é o limite da tensão do mecanismo de deslizamento de discordâncias, $\bar{\tau}_{eq}^{vm}$ é uma tensão equivalente

efetiva do tipo *von Mises* e H é a função de *Heaviside*³ com o argumento $(\bar{\tau}_{eq}^{vm} - \tau_d)$. Os três mecanismos definidos pelas Eqs. (3.45) - (3.47), representam: a escalagem de discordâncias (*dislocation climb*), o mecanismo bem caracterizado experimentalmente porém indefinido (*undefined mechanism*) e o deslizamento de discordâncias (*dislocation glide*), respectivamente.

A resposta transiente é descrita por um fator de multiplicação aplicado à taxa de deformação viscoplástica efetiva no regime estacionário. Como resultado, a taxa de fluência total está relacionada à fluência em regime estacionário através da seguinte relação

$$\dot{\epsilon}_{ef}^p = F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) \dot{\epsilon}_{ef(s)}^p \quad (3.48)$$

sendo F a função transiente.

Deste modo, define-se a equação constitutiva (2.89) da seguinte forma

$$\frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} = \mathfrak{I}_p(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) = \begin{cases} F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) \dot{\epsilon}_{ef(s)}^p, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \circ) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \circ) < 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

A função transiente possui três partes: endurecimento, regime estacionário e recuperação, como segue:

$$F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) = \begin{cases} \exp \left\{ \delta_1(\mathbf{E}^e, \beta) \left(1 - \left(\frac{\kappa}{\epsilon_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)} \right) \right)^2 \right\}; & \kappa \leq \epsilon_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) \\ \exp \left\{ -\delta_2(\mathbf{E}^e, \beta) \left(1 - \left(\frac{\kappa}{\epsilon_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)} \right) \right)^2 \right\}; & \kappa > \epsilon_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) \end{cases} \quad (3.50)$$

sendo $\delta_1(\mathbf{E}^e, \beta)$ e $\delta_2(\mathbf{E}^e, \beta)$ os parâmetros de endurecimento e recuperação, respectivamente, e $\epsilon_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)$ o limite de deformação transiente.

A equação evolutiva que governa a taxa de variação da variável interna, κ , é dada por:

$$\dot{\kappa} = [F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) - 1] \dot{\epsilon}_{ef(s)}^p \quad (3.51a)$$

³ A função de Heaviside $H(x)$ é definida como

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

ou

$$\dot{\kappa} = \left\{ \frac{[F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) - 1]}{F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)} \right\} \frac{\dot{\lambda}_p}{(1 - \beta)}. \quad (3.52)$$

Como resultado

$$\dot{\kappa} = \left\{ \frac{[F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) - 1]}{F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)} \right\} \frac{\dot{\lambda}_p}{(1 - \beta)} = \frac{\partial}{\partial K} \{c_o(K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa)\} \dot{\lambda}_p \quad (3.53)$$

o que permite identificar

$$\frac{\partial}{\partial K} \{c_o(K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa)\} = \frac{1}{(1 - \beta)} \left\{ \frac{[F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) - 1]}{F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)} \right\}. \quad (3.54)$$

O limite da deformação transiente é expresso pela equação

$$\varepsilon_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) = K_o \exp\{c_b T\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^m \quad (3.55)$$

sendo K_o , c_b e m constantes materiais.

Os parâmetros de endurecimento por trabalho e recuperação são dados pelas expressões (MUNSON; FOSSUM; SENSENY, 1990):

$$\delta_1(\mathbf{E}^e, \beta) = \alpha_w + \chi_w \log_{10} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right) \quad (3.56)$$

e

$$\delta_2(\mathbf{E}^e, \beta) = \alpha_r + \chi_r \log_{10} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right) \quad (3.57)$$

em que α_w , α_r , χ_w e χ_r são constantes materiais.

3.4.2.2 Modelo de mecanismo duplo de deformação

A equação constitutiva correspondente à lei de fluência de Mecanismo Duplo de Deformação, proposta por Costa et al. (2005), é uma simplificação da equação desenvolvida por Munson, Fossum e Senseny (1989), Munson, Fossum e Senseny (1990) (Eq. (3.44)), e sua aplicação, portanto, é restrita a intervalos de fluência secundária. Na previsão do comportamento de poços que atravessam grandes espessuras de sal, como é o caso de poços recentes perfurados nas bacias de Campos e Santos, as rochas evaporíticas são analisadas segundo o comportamento elasto/viscoelástico, adotando-se esta

lei constitutiva, cujos parâmetros de fluência foram validados no trabalho de Costa et al. (2005). Nesta lei são considerados os seguintes mecanismos de deformação por fluência: deslizamento de discordâncias (*dislocation glide*) e mecanismo indefinido (*undefined mechanism*) (Fig. 1.10). Logo, a taxa de fluência estacionária é descrita pela seguinte equação constitutiva

$$\dot{\epsilon}_{ef(s)}^p = \begin{cases} \dot{\epsilon}_o A^* \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\tau_o} \right)^{n_1}, & \text{se } \bar{\tau}_{eq}^{vm} \leq \tau_o \\ \dot{\epsilon}_o A^* \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\tau_o} \right)^{n_2}, & \text{se } \bar{\tau}_{eq}^{vm} > \tau_o \end{cases} \quad (3.58)$$

em que

$$A^* = \exp \left[\left(\frac{Q}{RT_o} - \frac{Q}{RT} \right) \right] \quad (3.59)$$

é o parâmetro que incorpora o efeito da temperatura ao modelo. Nesta lei $\dot{\epsilon}_o$ denota a taxa de deformação por fluência de referência, $\bar{\tau}_{eq}^{vm}$ a tensão equivalente efetiva do tipo *von Mises*, τ_o a tensão equivalente de referência, n o parâmetro função da tensão aplicada, Q a energia de ativação, R a constante universal dos gases, T a temperatura absoluta da rocha na profundidade em estudo e T_o a temperatura de referência. $\bar{\tau}_{eq}^{vm}$ representa a tensão atual enquanto a tensão de referência τ_o representa o valor no qual o expoente da tensão n muda instantaneamente.

Visto que este modelo reproduz somente a fase secundária da fluência, propõem-se também, neste trabalho, a descrição da fluência primária, adotando a inserção de um multiplicador à taxa de fluência estacionária, idem ao modelo de Multimecanismos de Deformação do sal apresentado em Munson e Devries (1991), Munson e Wawersik (1991) e Munson (1997). Como resultado, a taxa de fluência total é relacionada à fluência no regime estacionário pela seguinte relação

$$\dot{\epsilon}_{ef}^p = F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) \dot{\epsilon}_{ef(s)}^p. \quad (3.60)$$

Desta forma, as equações remanescentes para a descrição da fluência primária seguem como as do modelo de Multimecanismos de Deformação apresentado acima, ou seja, Eqs. (3.50) - (3.57).

3.4.3 Incorporação da lei de endurecimento

Neste ponto, incorpora-se a lei de endurecimento para as rochas salinas, através da proposição de uma equação para o parâmetro $c(\mathbf{E}^e, \beta, \kappa)$ da função de escoamento (Eq. (3.28)). Existem dois métodos particularmente

populares na descrição do endurecimento isotrópico dos materiais: endurecimento por deformação (*strain hardening*) e endurecimento por trabalho (*work hardening*) (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008). O método de endurecimento por deformação é frequentemente empregado em modelos de fluência para a descrição da fase transiente, representando com aptidão o decréscimo da taxa de deformação, ou seja, o processo de endurecimento (NAUMENKO, 2007). Diante disso, utiliza-se aqui o método de endurecimento por deformação conforme segue abaixo.

3.4.3.1 Endurecimento por deformação (*strain hardening*)

No caso do método de endurecimento por deformação, é frequente considerar o parâmetro $c(\mathbf{E}^e, \beta, \kappa)$ dependente da deformação viscoplastica equivalente associada a tensão equivalente efetiva do tipo *von Mises* $\bar{\tau}_{eq}^{vm}$, denotada aqui por ε_{vm}^p . Para a determinação da taxa de deformação inelástica equivalente, $\dot{\varepsilon}_{vm}^p$, aplica-se o princípio da equivalência da taxa de trabalho inelástico, de acordo com Goldberg, Roberts e Gilat (2003). Deste modo, a taxa de trabalho inelástico, associada a distorção da deformação, $\dot{\omega}_{vm}^p$, é dada por

$$\dot{\omega}_{vm}^p = \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D \cdot \mathbf{D}_R^{Dp} = \bar{\tau}_{eq}^{vm} \dot{\varepsilon}_{vm}^p \quad (3.61)$$

permitindo identificar

$$\dot{\varepsilon}_{vm}^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\varepsilon}_{ef}^p \quad (3.62)$$

em que

$$\dot{\varepsilon}_{ef}^p = \begin{cases} F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) \dot{\varepsilon}_{ef(s)}^p, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) < 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Logo, a partir da Eq. (3.52) obtém-se

$$\dot{\varepsilon}_{vm}^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)}{(F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta) - 1)} \right] \dot{\kappa}. \quad (3.64)$$

Visto que $c = c(\mathbf{E}^e, \beta, \kappa)$ é possível supor o caso particular em que $c(\mathbf{E}^e, \beta, \kappa) = c(\varepsilon_{vm}^p)$. Assim, define-se a expressão para $c(\varepsilon_{vm}^p)$ utilizando um modelo não linear de encruamento, apresentado em Lemaitre e Lippmann

(1996), como segue

$$c(\epsilon_{vm}^p) = c_h + c_\infty \left[1 - e^{-b \epsilon_{vm}^p} \right] \quad (3.65)$$

em que c_h , c_∞ e b são constantes.

A partir da equação acima também identifica-se

$$\dot{c}(\epsilon_{vm}^p) = b[(c_\infty + c_h) - c(\epsilon_{vm}^p)] \dot{\epsilon}_{vm}^p \quad (3.66)$$

sendo a Eq. (3.65) solução da equação diferencial (3.66).

3.4.4 Formulação do dano

A formulação do dano adotado neste trabalho, baseado em Salari et al. (2004), considera o acoplamento entre a deformação viscoplástica e o dano provocado por microfissuras.

O dano é suposto manter um comportamento isotrópico, sendo representado por uma variável escalar de dano que evolui perante deformação volumétrica expansiva, condizendo com o dano gerado em rochas e concreto. Segundo Salari et al. (2004), o dano gerado nestes materiais é provocado por microfissuras que se manifestam, em nível macroscópico, na forma de deformação volumétrica expansiva. Estas deformações volumétricas positivas acoplam os mecanismos de dissipação do dano e do fluxo viscoplástico, introduzindo a degradação da rigidez elástica e o amolecimento do material. Neste contexto, seguindo a proposta de Salari et al. (2004), supõe-se que o principal responsável pela evolução do dano é a contribuição tratativa da energia de deformação volumétrica, contribuição provinda da parcela volumétrica da força termodinâmica associada ao dano (Eq.(3.25)).

3.4.5 Definição do potencial de dissipação do dano

Supondo a existência de um pseudopotencial de dissipação, $\varphi^*(Y_o^i; \circ)$ – função escalar contínua, convexa, positiva e nula na origem, com $(\circ) = (\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)$ –, o qual satisfaz a desigualdade associada ao processo de dano ((Eq. (2.85)), determina-se, impondo o critério de dissipação normal, a seguinte equação de evolução

$$\dot{\beta} \in \partial \varphi^*(Y_o^i; \circ). \quad (3.67)$$

Também, é introduzida uma função limiar/limite de dano, em analogia a alguns modelos de dano associativos encontrados na literatura, definindo,

portanto, o conjunto convexo

$$\mathfrak{I} = \left\{ (Y_o^i) \mid f^d(Y_o^i; \circ) \leq 0 \right\}. \quad (3.68)$$

A função limite de dano, adotada neste trabalho, de acordo com Salari et al. (2004), é baseada em energia e define o critério de início do dano através da seguinte expressão

$$f^d(Y_o^i; \beta) = Y_o^i - r_\beta(\beta) \quad (3.69)$$

em que a força termodinâmica, Y_o^i , representa a demanda de densidade de energia (por unidade de volume) e $r_\beta(\beta)$ a função resistência à energia.

Diferentes funções resistência podem ser utilizadas, neste trabalho emprega-se a expressão proposta por Carol, Rizzi e Willam (2001), dada por

$$r_\beta(\beta) = Y_o^c (1 - \beta)^{p_a - 1} \quad (3.70)$$

em que Y_o^c designa o módulo de resiliência do material e o expoente p_a a razão entre o módulo de resiliência e o módulo de tenacidade, i.e.,

$$p_a = \frac{Y_o^c}{g_f}. \quad (3.71)$$

Além disso, define-se a função indicadora do conjunto \mathfrak{I} como a função escalar convexa positiva, nula na origem, dada por

$$I_{\mathfrak{I}}(Y_o^i; \circ) = \begin{cases} 0, & \text{se } Y_o^i \in \mathfrak{I} \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.72)$$

Uma vez estabelecida a função indicadora, é possível definir o potencial de dissipação,

$$\varphi^*(Y_o^i; \circ) = I_{\mathfrak{I}}(Y_o^i; \circ). \quad (3.73)$$

Consequentemente, pode-se reescrever a Eq. (3.67) da seguinte maneira

$$\dot{\beta} \in \partial I_{\mathfrak{I}}(Y_o^i; \circ) \quad (3.74)$$

o que afirma que $\dot{\beta}$ é um subgradiente de $I_{\mathfrak{I}}(Y_o^i; \circ)$.

3.4.5.1 Regularização do potencial de dissipação de dano

Para contornar o problema da não-diferenciabilidade do potencial de dano, $\varphi^*(Y_o^i; \circ)$, de maneira que seja possível aplicar algoritmos de solução tradicionais, é necessário a regularização deste potencial. O potencial de dano, $\varphi^*(Y_o^i; \circ)$, é tal que

$$\lim_{\eta_\beta \rightarrow 0} \varphi_{\eta_\beta}^*(Y_o^i; \circ) = \varphi^*(Y_o^i; \circ). \quad (3.75)$$

Logo, a forma regularizada do potencial de dano é fornecida como,

$$\varphi_{\eta_\beta}^*(Y_o^i; \circ) = \frac{1}{2\eta_\beta} \left(\left\langle f^d(Y_o^i; \circ) \right\rangle^+ \right)^2 \quad (3.76)$$

a qual é um tipo de função de penalidade exterior, definida de modo que no limite represente a função indicadora do conjunto \mathfrak{S} . η_β é um parâmetro de penalidade adequado.

Como resultado do processo de regularização, determina-se, aplicando o critério de dissipação normal, a seguinte equação de evolução para a variável escalar de dano

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial \varphi_{\eta_\beta}^*(Y_o^i; \circ)}{Y_o^i} \\ &= \frac{1}{\eta_\beta} \left\langle f^d(Y_o^i; \circ) \right\rangle^+ \frac{\partial f^d(Y_o^i; \circ)}{Y_o^i}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Consequentemente, da definição da função limite de dano (Eq. 3.69), chega-se a

$$\dot{\beta} = \frac{1}{\eta_\beta} \left\langle Y_o^i - r_\beta(\beta) \right\rangle^+. \quad (3.78)$$

3.4.6 Forma forte da equação de evolução do dano não local

A equação diferencial para a evolução do dano é fornecida pela Eq. (2.34). Restringindo esta equação a processos quase-estáticos, ou seja, $\rho_o c_a \dot{\beta} = 0$, e substituindo a Eq. (2.73), obtém-se

$$\text{div} \left(\vec{H}_o \right) + (-Y_o^r + A_o) - Y_o^{\text{reac}} - Y_o^i = 0 \quad (3.79)$$

e, conseqüentemente,

$$Y_o^i = \text{div} \left(\vec{H}_o \right) + (-Y_o^r + A_o) - Y_o^{reac}. \quad (3.80)$$

Considerando a fonte volumétrica de trabalho do dano como,

$$A_o = -\frac{1}{2} \mathbb{D} \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^e + \frac{1}{2} k_o \left(\langle \varepsilon_{vol}^e \rangle^+ \right)^2, \quad (3.81)$$

e substituindo as Eqs. (3.25) e (3.81) na Eq. (3.80) chega-se a

$$Y_o^i = \text{div} \left(\vec{H}_o \right) + \frac{1}{2} k_o \left(\langle \varepsilon_{vol}^e \rangle^+ \right)^2 + \rho_o \Psi_{ov}^p(\kappa) - Y_o^{reac}$$

em que

$$(-Y_o^r + A_o) = \frac{1}{2} k_o \left(\langle \varepsilon_{vol}^e \rangle^+ \right)^2 + \rho_o \Psi_{ov}^p(\kappa). \quad (3.82)$$

Neste ponto, é possível reescrever a Eq (3.9) da seguinte maneira

$$\rho_o \Psi_{ov}^p(\mathbf{E}^e, \kappa) = \int_o^t \left\{ \langle \bar{\tau}_{RH} \rangle^+ \dot{\varepsilon}_{vol}^p \right\} dt \quad (3.83)$$

já que $\langle -\dot{\varepsilon}_{vol}^p \rangle^+ = 0$ e $\langle \dot{\varepsilon}_{vol}^p \rangle^+ = \dot{\varepsilon}_{vol}^p$ em consequência de $\dot{\lambda}_p > 0$ e $\vartheta > 0$ na Eq. (3.37), assegurando, portanto, $\dot{\varepsilon}_{vol}^p \geq 0$.

Desta forma, por meio da substituição da Eq. (3.80) na Eq. (3.78), pode-se expressar a equação de evolução do dano como

$$\dot{\beta} = \frac{1}{\eta_\beta} \left\langle \text{div} \left(\vec{H}_o \right) + (-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right\rangle^+ \quad (3.84)$$

com

$$r_\beta^*(\beta) = r_\beta(\beta) + Y_o^{reac} \quad (3.85)$$

representado a resistência efetiva aplicável para $\beta \in R$.

Por fim, reescreve-se a equação de evolução do dano como segue

$$c_\beta \dot{\beta} = \text{div} \left(\vec{H}_o \right) + \left\langle (-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right\rangle^+ \quad (3.86)$$

em que o parâmetro $\eta_\beta > 0$ é renomeando por $c_\beta > 0$ – identificado a partir de dados experimentais. Para satisfazer a irreversibilidade do processo de dano (Eq. (2.85)) o termo $\text{div} \left(\vec{H}_o \right)$ deveria permanecer incluído no operador

de *Macaulay*, $\langle \circ \rangle^+$, entretanto, a fim de viabilizar a solução numérica da equação diferencial, este termo foi retirado do interior do operador. Portanto, foi necessário implementar um procedimento de projeção durante a solução aproximada do problema de evolução, de modo que a irreversibilidade do processo de dano fosse satisfeita.

Na Eq. (3.85), quando $\beta > 1$, a evolução do dano decresce pois o termo de penalidade Y_o^{reac} aumenta o valor da função resistência $r_\beta(\beta)$, i.e.,

$$r_\beta^*(\beta) = r_\beta(\beta) + \frac{\langle \beta - 1 \rangle^+}{\bar{\eta}_\alpha}, \quad (3.87)$$

todavia, no caso de $\beta < 0$, a taxa de dano cresce em razão do termo Y_o^{reac} diminuir o valor da resistência $r_\beta(\beta)$, i.e.,

$$r_\beta^*(\beta) = r_\beta(\beta) - \frac{\langle -\beta \rangle^+}{\bar{\eta}_\alpha}. \quad (3.88)$$

A parcela da equação de evolução do dano (3.86) onde atua o operador de *Macaulay* e a equação que representa a resistência efetiva (3.85) também podem ser expressas em termos da função de *Heaviside*⁴, como segue:

$$\left\langle (-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right\rangle^+ = \left\{ (-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right\} H \left((-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right), \quad (3.89)$$

$$r_\beta^*(\beta) = r_\beta(\beta) + \frac{1}{\bar{\eta}_\alpha} \{ \beta H(-\beta) + (\beta - 1) H(\beta - 1) \}.$$

Finalmente, nas Tabs. 3.1 e 3.2 são apresentados os resumos dos modelos propostos para a análise do comportamento dúctil e frágil de rochas salinas. Na Tab. 3.1 é mostrado o resumo do conjunto de equações do modelo elastoviscopoplástico com dano cuja fluência é descrita pela lei de Multimecanismos de Deformação proposta por Munson, Fossum e Senseny (1990). A Tab. 3.2 apresenta o resumo da segunda proposição de modelo elastoviscopoplástico com dano, no qual a fluência primária é representada pela lei de Multimecanismos de Deformação e a fluência secundária pela lei de Meca-

⁴O operador de *Macaulay* $\langle x \rangle^+$ também pode ser definido em termos na função de *Heaviside* (GERE, 2004):

$$\langle x \rangle^+ = (x) H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ (x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

nismo Duplo de Deformação desenvolvida por Costa et al. (2005), sendo, portanto, esta lei de fluência denominada, neste trabalho, de lei de Mecanismo Duplo Modificada. A discretização das equações destes modelos é apresentada no capítulo 4.

Tabela 3.1: Conjunto de equações do primeiro modelo constitutivo - lei de fluência de Multimecanismos de Deformação.

(i) Resposta tensão-deformação elástica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_R = \mathbb{D}\mathbf{E}^e, \quad \text{em que} \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_R = \frac{\boldsymbol{\tau}_R^D}{(1-\beta)}$$

(ii) Regra de fluxo e lei de evolução do endurecimento

$$\mathbf{D}_R^p = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} \left(\frac{\vartheta}{3} \mathbf{I} + \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D}{2\bar{q}} \right)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \left\{ \frac{(F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) - 1)}{F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta)} \right\} \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} = [F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) - 1] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s)}^p$$

em que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef}^p = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} = \begin{cases} F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s)}^p, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) < 0 \end{cases}$$

sendo

$$F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) = \begin{cases} \exp \left\{ \delta_1(\mathbf{E}^e, \beta) \left(1 - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)} \right) \right)^2 \right\}; & \boldsymbol{\kappa} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) \\ \exp \left\{ -\delta_2(\mathbf{E}^e, \beta) \left(1 - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)} \right) \right)^2 \right\}; & \boldsymbol{\kappa} > \boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) \end{cases}$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s)}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s_1)}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s_2)}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s_3)}^p$$

em que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s_1)}^p = A_1 \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^{n_1}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s_2)}^p = A_2 \exp \left\{ \frac{-Q_2}{RT} \right\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^{n_2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s_3)}^p = H(\bar{\tau}_{eq}^{vm} - \tau_d) \left[B_1 \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} + B_2 \exp \left\{ \frac{-Q_2}{RT} \right\} \right] \sinh \left[\frac{d_o(\bar{\tau}_{eq}^{vm} - \tau_d)}{\mu_o} \right]$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) = K_o \exp \{ c_b T \} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^m$$

satisfazendo

$$\bar{\tau}_{eq}^{vm} = \sqrt{3} \bar{q} \quad \text{e} \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D} \quad \bar{p} = \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}_R) = \bar{\tau}_{RH}$$

(iii) Condição de escoamento

$$f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) = \eta \bar{p} + \bar{q} - \xi c(K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) \quad \text{com} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vm}^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef}^p$$

em que

$$c(K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) = c(\boldsymbol{\varepsilon}_{vm}^p) = c_h + c_\infty \left[1 - e^{-b \boldsymbol{\varepsilon}_{vm}^p} \right]$$

sendo c_h e c_∞ e b constantes.

Tabela 3.2: Conjunto de equações do segundo modelo constitutivo - lei de fluência de Mecanismo Duplo Modificada.

(i) Resposta tensão-deformação elástica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_R = \mathbb{D} \mathbf{E}^e, \quad \text{em que} \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_R = \frac{\boldsymbol{\tau}_R}{(1-\beta)}$$

(ii) Regra de fluxo e lei de evolução do endurecimento

$$\mathbf{D}_R^p = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} \left(\frac{\vartheta}{3} \mathbf{I} + \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D}{2\bar{q}} \right)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \left\{ \frac{(F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) - 1)}{F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta)} \right\} \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} = [F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) - 1] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s)}^p$$

em que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef}^p = \frac{\dot{\lambda}_p}{(1-\beta)} = \begin{cases} F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s)}^p, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) < 0 \end{cases}$$

sendo

$$F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) = \begin{cases} \exp \left\{ \delta_1(\mathbf{E}^e, \beta) \left(1 - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)} \right) \right)^2 \right\}; & \boldsymbol{\kappa} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) \\ \exp \left\{ -\delta_2(\mathbf{E}^e, \beta) \left(1 - \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta)} \right) \right)^2 \right\}; & \boldsymbol{\kappa} > \boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) \end{cases}$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef(s)}^p = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_o A^* \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{vm}}{\boldsymbol{\tau}_o} \right)^{n_1}, & \text{se } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{vm} \leq \boldsymbol{\tau}_o \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_o A^* \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{vm}}{\boldsymbol{\tau}_o} \right)^{n_2}, & \text{se } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{vm} \geq \boldsymbol{\tau}_o \end{cases}$$

com

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t^*(\mathbf{E}^e, \beta) = K_o \exp \{c_b T\} \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{vm}}{\mu_o} \right)^m \quad \text{e} \quad A^* = \exp \left\{ \frac{Q}{RT_o} - \frac{Q}{RT} \right\}$$

satisfazendo

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^{vm} = \sqrt{3} \bar{q} \quad \text{e} \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_R^D} \quad \bar{p} = \frac{1}{3} tr(\bar{\boldsymbol{\tau}}_R) = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{RH}$$

(iii) Condição de escoamento

$$f(\boldsymbol{\tau}_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) = \eta \bar{p} + \bar{q} - \xi c(K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) \quad \text{com} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vm}^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ef}^p$$

em que

$$c(K; \mathbf{E}^e, \beta, \boldsymbol{\kappa}) = c(\boldsymbol{\varepsilon}_{vm}^p) = c_h + c_\infty \left[1 - e^{-b \boldsymbol{\varepsilon}_{vm}^p} \right]$$

sendo c_h e c_∞ e b constantes.

4 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO MODELO

Neste capítulo é apresentado a solução numérica dos modelos constitutivos elastoviscoplasticos com dano propostos, apresentados na Tab. 3.1 e 3.2. A solução numérica consiste em discretizar os modelos no espaço e no tempo. A discretização espacial é efetuada em âmbito global, ou seja, estrutural por meio do Método dos Elementos Finitos de *Galerkin*. Enquanto, a discretização temporal considera o tempo de interesse $[0, t_f]$ subdividido em uma sequência de N intervalos $[t_n, t_{n+1}]$. Neste trabalho, tratando-se de deformações finitas, optou-se pelo método exponencial implícito para discretização temporal da regra de fluxo viscoplastico e pelo método clássico de *Euler* implícito para a discretização das demais equações de evolução. Este procedimento conduz a um problema constitutivo de valor inicial, resolvido adotando o método de aproximação baseada na decomposição de operadores (*operator split method*).

4.1 Problema constitutivo de valor inicial elastoviscoplastico

No presente contexto, as variáveis desconhecidas do problema de valor inicial elastoviscoplastico são o gradiente da deformação viscoplastica \mathbf{F}^p e a variável interna κ . Em um procedimento de tempo incremental, com $t \in [t_n, t_{n+1}]$, as condições iniciais são

$$\mathbf{F}^p(t_n) = \mathbf{F}_n^p \quad (4.1)$$

e

$$\kappa(t_n) = \kappa_n \quad (4.2)$$

em que o problema está sujeito à história prescrita do gradiente da deformação $\mathbf{F}(t)$ e do dano $\beta(t)$, para $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Assim, o problema constitutivo de valor inicial consiste em encontrar \mathbf{F}^p e a variável interna κ que satisfaçam, para todo $t \in [t_n, t_{n+1}]$, as equações constitutivas dadas pelas Eqs. (3.19), (3.35), (3.40) e (3.43).

4.2 Método de decomposição de operadores (*operator split method*)

A utilização do método de aproximação baseada na decomposição de operadores, acarreta em um algoritmo que compreende duas etapas básicas:

- **Preditor elástico** – o problema é suposto como puramente elástico en-

tre t_n e t_{n+1} .

- **Corretor elastoviscoplastico com dano** – solução de um sistema de equações discretizadas não lineares, envolvendo: a lei da elasticidade, o fluxo viscoplastico, a evolução das variáveis internas e o critério de carregamento/descarregamento. Nesta fase são adotadas como condições iniciais os resultados obtidos na solução do problema preditor elástico.

4.2.1 Preditor elástico

Nesta etapa supõe-se que

$$\dot{\mathbf{F}}^p = 0 \quad (4.3)$$

e

$$\dot{\kappa} = 0. \quad (4.4)$$

Então, a solução deste problema puramente elástico, o estado elástico teste (*trial elastic state*), é obtida como

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p^{trial}} = \mathbf{F}_n^p \quad (4.5)$$

e

$$\kappa_{n+1}^{trial} = \kappa_n. \quad (4.6)$$

O correspondente gradiente de deformação elástica teste, $\mathbf{F}_{n+1}^{e^{trial}}$ ¹, é determinado por

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{trial}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}. \quad (4.7)$$

Visto que a lei elástica é definida em termos da medida de deformação logarítmica \mathbf{E}^e , torna-se necessário calcular

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{trial}} = \left(\mathbf{F}_{n+1}^{e^{trial}} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e^{trial}}, \quad (4.8)$$

para, em seguida, determinar a deformação logarítmica teste $\mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}}$, da seguinte maneira

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}} = \frac{1}{2} \ln \left(\mathbf{C}_{n+1}^{e^{trial}} \right). \quad (4.9)$$

¹Do inglês *strain-driven problem*, i.e., $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^k$. Para cada incremento de $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^k$ tem-se um gradiente de deformação \mathbf{F}_{n+1}^k . Assim enuncia-se que o problema é regido pela deformação.

Um vez que $\mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}}$ é calculado, pode-se determinar a tensão rotacionada de *Kirchhoff* teste $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{trial}$, pela lei hiperelástica expressa na Eq. (3.19), ou seja

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{trial} = 2\mu_o \mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}} + \lambda_o tr \left[\mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}} \right] \mathbf{I}. \quad (4.10)$$

Aplicando o operador traço na Eq. (3.19), obtém-se a parcela hidrostática da tensão rotacionada de *Kirchhoff* teste,

$$\bar{\tau}_{R_{n+1}}^{trial} = \bar{p}_{n+1}^{trial} = \frac{1}{3} tr \left[\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{trial} \right]. \quad (4.11)$$

Consequentemente chega-se a

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{Dtrial} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{trial} - \bar{p}_{n+1}^{trial} \mathbf{I}$$

e

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{Dtrial} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{Dtrial}} \quad (4.12)$$

a parcela deviatórica da tensão rotacionada de *Kirchhoff* teste $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{Dtrial}$ e o segundo invariante da tensão deviatórica teste \bar{q}_{n+1}^{trial} .

Além disso, para a coesão real (Eq. (3.65)), integrando a Eq. (3.64), tem-se,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varepsilon}_{vm}^p dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta)}{(F(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\kappa}, \beta) - 1)} \right] \dot{\kappa} dt,$$

i.e.,

$$\varepsilon_{vm_{n+1}}^{ptrial} - \varepsilon_{vm_n}^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{F(\mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{trial}, \beta_{n+1})}{(F(\mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{trial}, \beta_{n+1}) - 1)} \right] \left\{ \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\kappa}_n \right\} \quad (4.13)$$

logo, como $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\kappa}_n$, verifica-se que,

$$\varepsilon_{vm_{n+1}}^{ptrial} = \varepsilon_{vm_n}^p, \quad (4.14)$$

assim,

$$c \left(\varepsilon_{vm_{n+1}}^{ptrial} \right) = c_h + c_\infty \left[1 - e^{-b \varepsilon_{vm_n}^p} \right]. \quad (4.15)$$

Por fim, é realizado a verificação do critério de escoamento. Se o

estado elástico teste pertencer de fato ao domínio elástico atual, isto é,

$$f\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^{trial}, \mathbf{K}_{n+1}^{trial}, \mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}}, \beta_{n+1}, \kappa_{n+1}^{trial}\right) < 0, \quad (4.16)$$

então, atualiza-se

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \quad (4.17)$$

implicando, por exemplo, que

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{F}_{n+1}^{p^{trial}} = \mathbf{F}_n^p \quad (4.18)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{trial}, \quad (4.19)$$

$$\kappa_n = \kappa_{n+1}^{trial} \quad (4.20)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vm_n}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{vm_{n+1}}^{p^{trial}}. \quad (4.21)$$

Deste modo, o algoritmo é finalizado e avança para o próximo incremento de tempo. Caso contrário ($f_{n+1}^{trial} \geq 0$) – o estado elástico teste não é solução do problema –, inicia-se à etapa de correção viscoplástica ou mapeamento de retorno viscoplástico, conforme descrito abaixo.

4.2.2 Corretor elastoviscoplástico com dano

Para solucionar o problema elastoviscoplástico inicial adota-se o procedimento denominado de correção viscoplástica, o qual condiz à classe dos algoritmos de mapeamento de retorno amplamente explorados em Simo e Hughes (2006), de Souza Neto, Peric e Owen (2008). Porém, de maneira diferente dos trabalhos envolvendo deformações infinitesimais, os quais adotam geralmente a aproximação baseada no método de Euler implícito para a discretização do fluxo viscoplástico, neste trabalho empregando-se a aproximação exponencial implícita proposta por Eterovic e Bathe (1990), Weber e Anand (1990). Deste modo, através da hipótese da decomposição multiplicativa do gradiente da deformação e da utilização da medida de deformação logarítmica conjuntamente com a aproximação exponencial implícita, é possível modificar o algoritmo de mapeamento de retorno de maneira que este permaneça no formato geral de problemas formulados em pequenas deformações. Além disso, no caso de problemas de deformação

finita, o emprego do método de Euler implícito tradicional não garante a incompressibilidade do fluxo viscoplástico em materiais insensíveis à pressão hidrostática, provocando, portanto, consideráveis perdas de precisão durante a integração numérica das equações constitutivas de modelos desta classe (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008).

Assim, a regra de fluxo viscoplástico,

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \check{\mathbf{D}}^p \mathbf{F}^p, \quad (4.22)$$

é discretizada utilizando uma aproximação exponencial implícita (*backward exponential*), com \mathbf{F}_n^p como condição inicial e $\check{\mathbf{D}}^p = (\mathbf{U}^e)^{-1} \mathbf{D}_R^p \mathbf{U}^e$ (configuração não tencionada), resultando em

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp \left(\Delta \varepsilon_{ef}^p \frac{\partial G_{vp}^*}{\partial \boldsymbol{\tau}_R} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^p. \quad (4.23)$$

em que o incremento da deformação viscoplástica efetiva $\Delta \varepsilon_{ef}^p$ deve ser estritamente positivo, i.e., $\Delta \varepsilon_{ef}^p > 0$, sob carregamento viscoplástico.

Para discretização da deformação viscoplástica efetiva (modelo de fluência de Munson, Fossum e Senseny (1990) – Tab. 3.1) aplica-se o método clássico de *Euler* implícito (Bresolin (2010) – Apêndice A), resultando na seguinte aproximação

$$\varepsilon_{ef,n+1}^p = \varepsilon_{ef,n}^p + \Delta \varepsilon_{ef}^p \quad (4.24)$$

em que

$$\Delta \varepsilon_{ef}^p = F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)|_{n+1} \Delta \varepsilon_{ef(s)}^p \quad (4.25)$$

e

$$\Delta \varepsilon_{ef(s)}^p = \Delta \varepsilon_{ef(s_1)}^p + \Delta \varepsilon_{ef(s_2)}^p + \Delta \varepsilon_{ef(s_3)}^p \quad (4.26)$$

sendo

$$\Delta \varepsilon_{ef(s_1)}^p = A_1 \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq,n+1}^{vm}}{\mu_o} \right)^{n_1} \Delta t, \quad (4.27)$$

$$\Delta \varepsilon_{ef(s_2)}^p = A_2 \exp \left\{ \frac{-Q_2}{RT} \right\} \left(\frac{\bar{\tau}_{eq,n+1}^{vm}}{\mu_o} \right)^{n_2} \Delta t, \quad (4.28)$$

e

$$\Delta \varepsilon_{ef(s_3)}^p = H(\bar{\tau}_{eq,n+1}^{vm} - \tau_d) \left[B_1 \exp \left\{ \frac{-Q_1}{RT} \right\} + B_2 \exp \left\{ \frac{-Q_2}{RT} \right\} \right] \sinh \left[\frac{d_o(\bar{\tau}_{eq,n+1}^{vm} - \tau_d)}{\mu_o} \right] \Delta t. \quad (4.29)$$

Do mesmo modo, obtém-se a seguinte aproximação para a variável associada ao endurecimento isotrópico

$$\kappa_{n+1} = [F(\bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) - 1] \Delta \varepsilon_{ef(s)}^p(\bar{q}_{n+1}) - \kappa_n. \quad (4.30)$$

implincando na subsequente aproximação para a deformação viscoplástica equivalente de *von Mises*

$$\varepsilon_{vm_{n+1}}^p = \varepsilon_{vm_n}^p + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)|_{n+1}}{(F(\mathbf{E}^e, \kappa, \beta)|_{n+1} - 1)} \right\} \Delta \kappa. \quad (4.31)$$

A única diferença no conjunto de equações do modelo constitutivo apresentado na Tab. 3.1 e na Tab. 3.2 é a contribuição do termo $\varepsilon_{ef(s)}^p$. Conforme já mencionado, no primeiro conjunto de equações adota-se para a descrição da deformação viscoplástica efetiva o modelo de fluência de Munson, Fossum e Senseny (1990), enquanto no segundo conjunto optou-se pelo lei de fluência de Munson, Fossum e Senseny (1990) juntamente com a lei de Costa et al. (2005). Então, para a deformação viscoplástica efetiva estacionária $\varepsilon_{ef(s)}^p$, proposta por Costa et al. (2005) (Tab. 3.2), a seguinte aproximação é obtida

$$\Delta \varepsilon_{ef(s)}^p \simeq \begin{cases} \dot{\varepsilon}_o A^* \left(\frac{\bar{\tau}_{eq_{n+1}}^{vm}}{\tau_o} \right)^{n_1} \Delta t & , \text{ se } \bar{\tau}_{eq_{n+1}}^{vm} \leq \tau_o \\ \dot{\varepsilon}_o A^* \left(\frac{\bar{\tau}_{eq_{n+1}}^{vm}}{\tau_o} \right)^{n_2} \Delta t & , \text{ se } \bar{\tau}_{eq_{n+1}}^{vm} \geq \tau_o. \end{cases} \quad (4.32)$$

4.2.3 Mapeamento pela integração exponencial

Da Eq. (4.23), é possível chegar a forma discreta da regra de evolução em termos da medida de deformação logarítmica (DE DEUS, 2008)

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbf{E}_{n+1}^{e^{trial}} - \Delta \varepsilon_{ef}^p \left. \frac{\partial G_{vp}^*}{\partial \tau_R} \right|_{n+1}. \quad (4.33)$$

Logo, a Eq. (4.33) substitui a Eq. (4.23), e o algoritmo de mapeamento de retorno pode ser formulado mantendo a mesma forma geral de problemas em pequenas deformações.

Com a regra de evolução expressa em termos da medida de

deformação logarítmica (Eq. 4.33) e da relação constitutiva hiperelástica (Eq. (3.19)) obtém-se

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{trial} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ef}^p \left\{ \left(\frac{2\mu_o}{3} + \lambda_o \right) \vartheta \mathbf{I} + \mu_o \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^D}{\bar{q}_{n+1}} \right\}. \quad (4.34)$$

Tomando o traço da equação anterior e dividindo o resultado por 3, determina-se

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_{n+1}^{trial} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ef}^p \left(\frac{2\mu_o}{3} + \lambda_o \right) \vartheta. \quad (4.35)$$

Além disso, a partir da tensão efetiva rotacionada de *Kirchhoff*,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^D + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{H_{n+1}}} \mathbf{I}, \quad (4.36)$$

com $\bar{p}_{n+1} = \bar{\tau}_{R_{H_{n+1}}}$, resulta que

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^D = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}^{Dtrial} \left[1 + \frac{\mu_o \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ef}^p}{\bar{q}_{n+1}} \right]^{-1}. \quad (4.37)$$

Por fim, da relação (4.12) chega-se a

$$\bar{q}_{n+1} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \mu_o \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ef}^p.$$

A partir dos resultados obtidos acima, pode-se formular o algoritmo de mapeamento de retorno viscoplástico, o qual consiste na solução de um sistema de equações não lineares, conforme descrito abaixo.

4.2.4 Formulação do Mapeamento de Retorno Viscoplastico

O algoritmo de retorno viscoplastico pode ser formulado como: Dado $(\mathbf{F}_{n+1}, \beta_{n+1})$, que permite obter $(\bar{p}_{n+1}^{trial}, \bar{q}_{n+1}^{trial})$, determinar $(\bar{p}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1})$ solução de:

$$\begin{cases} R_1(\bar{p}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) = \bar{p}_{n+1} + \vartheta \left(\frac{2\mu_o}{3} + \lambda_o \right) F(\bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) \Delta \mathcal{E}_{ef(s)}^p(\bar{q}_{n+1}) - \bar{p}_{n+1}^{trial} = 0 \\ R_2(\bar{p}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) = \bar{q}_{n+1} + \mu_o F(\bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) \Delta \mathcal{E}_{ef(s)}^p(\bar{q}_{n+1}) - \bar{q}_{n+1}^{trial} = 0 \\ R_3(\bar{p}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) = \kappa_{n+1} - [F(\bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1}) - 1] \Delta \mathcal{E}_{ef(s)}^p(\bar{q}_{n+1}) - \kappa_n = 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Uma vez determinado o conjunto $(\bar{p}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1})$, a evolução da tensão efetiva rotacionada de *Kirchhoff* (Eq. 4.36) pode ser calculada por meio dos resultados obtidos nas Eqs. (4.35) e (4.37). Ademais, é possível determinar o gradiente da deformação viscoplastica (Eq. (4.23)), a deformação viscoplastica equivalente (Eq. (4.31)) e a deformação viscoplastica efetiva (Eq. (4.24)).

Para a solução o sistema de equações não lineares (4.38), aplica-se o método de Newton. Este procedimento requer a determinação da matriz de rigidez tangente local, cujas componentes são dadas por

$$[\mathbb{K}_T(\vec{a})]_{ij} = \frac{\partial R_i(\vec{a})}{\partial a_j}$$

em que $\vec{a} = (\bar{p}_{n+1}, \bar{q}_{n+1}, \kappa_{n+1})$. A estimativa inicial para o método iterativo é $(\bar{p}_{n+1}^{(k)}, \bar{q}_{n+1}^{(k)}, \kappa_{n+1}^{(k)}) = (\bar{p}_{n+1}^{trial}, \bar{q}_{n+1}^{trial}, \kappa_n)$, em $k = 0$. Detalhes sobre o algoritmo do Método de Newton utilizado neste trabalho, são encontrados no Apêndice B do trabalho de De Deus (2008).

4.3 Problema de valor no contorno global

Com a definição do problema local, isto é, do modelo constitutivo e da estratégia de atualização das variáveis em t_{n+1} , pode-se resolver o problema de valor de contorno global em termos do deslocamento e do dano (\vec{u}, β) . Neste trabalho, adota-se uma formulação Lagrangiana total, portanto, as expressões são fornecidas na configuração de referência Ω_o . Assim, para a definição do problema de valor de contorno global, inicialmente emprega-se a formulação forte e posteriormente a formulação fraca – forma integral,

conforme apresentado a seguir.

4.3.1 Formulação forte do problema

A formulação forte do modelo elastoviscoplastico com dano não local pode ser enunciada como: Determine as funções de deslocamento e de dano $(\vec{u}(\vec{X}, t), \beta(\vec{X}, t))$, tal que, para cada $t \in [0, t_f]$ as seguintes equações diferenciais sejam satisfeitas:

$$\text{div} \left[\mathbf{P}(\vec{X}, t) \right] + \rho_o(\vec{X}) \vec{b}_o(\vec{X}, t) = 0 \quad \text{em } \Omega_o \quad (4.39)$$

submetida às condições de contorno

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\vec{X}, t) \vec{N}(\vec{X}, t) = \vec{t}_o(\vec{X}, t) & \text{em } \Gamma_o^t \\ \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{u}(\vec{X}, t) & \text{em } \Gamma_o^u \end{cases} \quad (4.40)$$

e

$$c_\beta \dot{\beta} = \text{div}(\vec{H}_o) + \left\langle (-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right\rangle^+ \quad (4.41)$$

submetida à condição de contorno

$$\vec{H}_o(\vec{X}, t) \cdot \vec{N}(\vec{X}, t) = 0 \quad \text{em } \Gamma_o \quad (4.42)$$

e à condição inicial

$$\beta(\vec{X}, 0) = 0 \quad \text{em } \Omega_o. \quad (4.43)$$

Os termos \vec{H}_o , $(-Y_o^r + A_o)$ e $r_\beta^*(\beta)$ são fornecidos pelas expressões (3.27), (3.82) e (3.85), respectivamente.

4.3.2 Formulação fraca do problema

A formulação fraca do modelo elastoviscoplastico com dano não local pode ser enunciada como: Determine as funções de deslocamento e de dano admissíveis $(\vec{u}, \beta) \in \mathcal{K}$, tal que, para cada $t \in [0, t_f]$ as seguintes equações sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\vec{u}, \beta; \vec{w}) &= \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\vec{X}} \vec{w} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_o} \vec{t}_o \cdot \vec{w} \, d\Gamma_o \\ &\quad - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_o \cdot \vec{w} \, d\Omega_o = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{V}_u \end{aligned} \quad (4.44)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\gamma(\vec{u}, \beta; \gamma) = \int_{\Omega_o} c_\beta \dot{\beta} \gamma d\Omega_o + \int_{\Omega_o} \vec{H}_o \cdot \nabla_{\vec{x}} \gamma d\Omega_o \\ - \int_{\Omega_o} \left\{ \left\langle (-Y_o^r + A_o) - r_\beta^*(\beta) \right\rangle^+ \right\} \gamma d\Omega_o = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{V}_\gamma. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Aqui, \mathcal{K} representa o conjunto dos deslocamentos e danos admissíveis, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_u \times \mathcal{K}_\gamma$, com

$$\mathcal{K} = \{(\vec{u}, \beta) \mid (\vec{u}, \beta) \text{ seja suficientemente regular, } \vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma_o^u\}$$

e \mathcal{V} denota o conjunto das variações admissíveis, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_u \times \mathcal{V}_\gamma$, com

$$\mathcal{V} = \{(\vec{w}, \gamma) \mid (\vec{w}, \gamma) \text{ seja suficientemente regular, } \vec{w} = 0 \text{ em } \Gamma_o^u\}.$$

4.4 Formulação incremental do problema elatoviscoplastico com dano

Para formulação incremental do problema, considera-se conhecida a solução no intervalo $[0, t_n]$ e impõe-se as equações de equilíbrio em t_{n+1} . Logo, entre o instante t_n e t_{n+1} , é considerado que o deslocamento \vec{u} e o dano β são dados, respectivamente, por

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \Delta \vec{u}_n$$

e

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta \beta_n.$$

Deste modo, em t_{n+1} , a forma fraca do problema incremental elastoviscoplastico com dano pode ser formulada como: Determine $(\vec{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) \in \mathcal{K}_{n+1}$, tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}, \beta_{n+1}; \vec{w}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}_{n+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{w} d\Omega - \int_{\partial\Omega_o} \vec{t}_{o_{n+1}} \cdot \vec{w} d\Gamma_o \\ - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{o_{n+1}} \cdot \vec{w} d\Omega_o = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{V}_u \end{aligned} \quad (4.46)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\gamma(\vec{u}_{n+1}, \beta_{n+1}; \gamma) = \int_{\Omega_o} \frac{c_\beta}{\Delta t} (\beta_{n+1} - \beta_n) \gamma d\Omega_o + \int_{\Omega_o} k_o^g \nabla_{\vec{x}} \beta_{n+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \gamma d\Omega_o \\ - \int_{\Omega_o} \left\{ \left\langle (-Y_o^r + A_o)_{n+1} - r_\beta^*(\beta_{n+1}) \right\rangle^+ \right\} \gamma d\Omega_o = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{V}_\gamma. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A formulação acima (Eqs. (4.46) e (4.47)) é conhecida como implícita – método de *Euler* implícito. Entretanto, por simplicidade e com o objetivo de desacoplar o sistema de equações associado a $(\vec{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$, um método semi-implícito é adotado. Deste modo, a formulação implícita acima é substituída por uma formulação semi-implícita, a qual pode ser enunciada como:

Dado β_n , determinar $\vec{u}_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$, tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}, \beta_n; \vec{w}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}_{n+1} \cdot \nabla_{\vec{X}} \vec{w} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_o} \vec{t}_{o_{n+1}} \cdot \vec{w} \, d\Gamma_o \\ - \int_{\Omega_o} \rho_o \vec{b}_{o_{n+1}} \cdot \vec{w} \, d\Omega_o = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{V}_u. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Determinado \vec{u}_{n+1}^2 através da Eq. (4.48) é possível obter o dano pela seguinte formulação incremental para a equação de evolução do dano:

Dado \vec{u}_{n+1} e β_n , determinar $\beta_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$, tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\gamma(\vec{u}_{n+1}, \beta_{n+1}; \gamma) = \int_{\Omega_o} \frac{c_\beta}{\Delta t} (\beta_{n+1} - \beta_n) \gamma \, d\Omega_o + \int_{\Omega_o} \int_{\Omega_o} \vec{H}_{o_{n+1}} \cdot \nabla_{\vec{X}} \gamma \, d\Omega_o \\ - \int_{\Omega_o} \left\{ \left\langle (-Y_o^r + A_o)_{n+1} - r_\beta^*(\beta_{n+1}) \right\rangle^+ \right\} \gamma \, d\Omega_o = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{V}_\gamma. \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.4.1 Linearização e Método de Newton – Módulo tangente consistente

Em razão do problema de valor de contorno (4.48) ser não linear com relação a \vec{u}_{n+1} , propõe-se o método de *Newton-Raphson* para solucioná-lo, conforme esquematizado a seguir.

Seja

$$\vec{u}_{n+1}^0 = \vec{u}_n, \quad k = 0 \quad (4.50)$$

em que k denota o número da iteração do método de Newton e \vec{u}_n o valor convergido do subintervalo de tempo anterior t_n . Desta maneira, para a k -ésima iteração, no instante t_{n+1} , tem-se

$$\vec{u}_{n+1}^{k+1} = \vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k. \quad (4.51)$$

Para determinar $\Delta \vec{u}_{n+1}^k$ é imposta a seguinte condição

$$\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^{k+1}, \beta_n; \vec{w}) = 0, \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{V}_u$$

²Visto que β_n é conhecido e devido a aplicação do método semi-implícito, o qual desacoplamento do sistema de equações, a Eq (4.48) pode ser resolvida para \vec{u}_{n+1} .

ou seja,

$$\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^{k+1}, \beta_n; \vec{w}) = \mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) = 0 \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{V}_u. \quad (4.52)$$

Considerando $\mathcal{F}_u(\circ, \circ; \circ)$ como suficientemente regular e expandindo $\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w})$ em uma série de Taylor em \vec{u}_{n+1}^k , obtém-se, para uma aproximação de primeira ordem,

$$\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k + \Delta \vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) = \mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) + D\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k]. \quad (4.53)$$

A partir da Eq.(4.52) é possível escrever

$$D\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] = -\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) \quad (4.54)$$

com

$$D\mathcal{F}_u(\vec{u}_{n+1}^k, \beta_n; \vec{w}) [\Delta \vec{u}_{n+1}^k] = \int_{\Omega_0} [\mathbb{A}(\vec{u}_{n+1}^k)] \nabla_{\vec{X}}(\Delta \vec{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\vec{X}} \delta \vec{u} \, d\Omega_0 \quad (4.55)$$

sendo $[\mathbb{A}]$ o módulo tangente consistente, dado por

$$[\mathbb{A}(\vec{u}_{n+1}^k)]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\vec{u}_{n+1}^k} = \left[\frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1} \right]_{n+1}. \quad (4.56)$$

Na Eq.(4.56) observa-se que o cálculo de \mathbb{A} requer a determinação da derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente de deformação. Porém, da Eq.(2.17), é possível escrever $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ como função da tensão rotacionada de Kirchhoff, $\boldsymbol{\tau}_{R_{n+1}}$, i.e.,

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1}^e (\boldsymbol{\tau}_{R_{n+1}}) (\mathbf{R}_{n+1}^e)^T. \quad (4.57)$$

Logo, derivando a expressão (4.57) com relação a \mathbf{F}_{n+1} , o seguinte resultado é obtido

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \boldsymbol{\tau}_{R_{n+1}} (\mathbf{R}_{n+1}^e)^T + (\mathbf{R}_{n+1}^e) \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{R_{n+1}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} (\mathbf{R}_{n+1}^e)^T + (\mathbf{R}_{n+1}^e) \boldsymbol{\tau}_{R_{n+1}} \frac{\partial (\mathbf{R}_{n+1}^e)^T}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}. \quad (4.58)$$

Entretando, sabendo que

$$\boldsymbol{\tau}_{R_{n+1}} = (1 + \beta_n) \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}$$

e escrevendo $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}$ em termos da deformação elástica teste \mathbf{E}_{n+1}^{trial} e do conjunto de variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}_n$ (DE SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008), tem-se

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}} \left(\mathbf{E}_{n+1}^{trial}, \boldsymbol{\alpha}_n \right).$$

Consequentemente, aplicando a regra da cadeia, chega-se a

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{trial}} \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{trial}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{trial}} \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{trial}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}, \quad (4.59)$$

em que

$$\tilde{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}_{R_{n+1}}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{trial}}, \quad \mathbb{G} = \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{trial}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{trial}} \quad \text{e} \quad \mathbb{H} = \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{trial}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}, \quad (4.60)$$

permitindo reescrever a Eq (4.59) como

$$\hat{\mathbb{D}} = \tilde{\mathbb{D}} \mathbb{G} \mathbb{H}. \quad (4.61)$$

Observa-se que o tensor de quarta ordem $\tilde{\mathbb{D}}$ – operador tangente – é a única contribuição de $\hat{\mathbb{D}}$ (Eq. 4.61), proveniente da relação constitutiva do material. Os termos restantes são todos relacionados à parcela geométrica das deformações finitas. O termo $\tilde{\mathbb{D}}$ depende do estado, ou seja, se o estado é elástico ou elastoviscoplastico. Quando $f(\tau_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) < 0$, supõe-se que $\tilde{\mathbb{D}}$ é o módulo elástico \mathbb{D} . Caso contrário, $f(\tau_R, K; \mathbf{E}^e, \beta, \kappa) \geq 0$, $\tilde{\mathbb{D}}$ torna-se o módulo tangente consistente elastoviscoplastico \mathbb{D}^{ep} , identificado através da solução do sistema equações locais (4.38).

A determinação de \mathbb{G} exige uma derivada do tipo $\frac{\partial \ln(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$, a qual é uma derivada de uma função isotrópica. Esta classe de derivadas foi investigada por de Souza Neto, Peric e Owen (1998), Ortiz, Radovitzky e Repetto (2001). Neste trabalho, adota-se a implementação proposta por Ortiz, Radovitzky e Repetto (2001). A determinação do termo \mathbb{H} segue da derivada do tensor deformação de *Cauchy-Green* à direita (Eq. 2.13), equanto para obter o tensor de quarta ordem $\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{F}_{n+1}}$, Eq. (4.58), emprega-se a definição da decomposição polar do gradiente da deformação \mathbf{F} , identificando que $\mathbf{R}_{n+1}^e = \mathbf{R}_{n+1}^{trial}$. Mais detalhes na determinação dos termos de $\hat{\mathbb{D}}$ podem ser encontrados no trabalho de Rossi (2005).

4.4.2 Linearização e Método de Newton – Módulo tangente consistente (dano)

Uma vez que o problema de valor de contorno (4.49) é não linear com relação a β_{n+1} , propõe-se o método de *Newton-Raphson* para solucioná-lo, conforme esquematizado a seguir.

Seja

$$\beta_{n+1}^0 = \beta_n, \quad k = 0 \quad (4.62)$$

em que k denota o número da iteração do método de Newton e β_n o valor convergido do subintervalo de tempo anterior t_n . Desta maneira, para a k -ésima iteração, no instante t_{n+1} , tem-se

$$\beta_{n+1}^{k+1} = \beta_{n+1}^k + \Delta\beta_{n+1}^k. \quad (4.63)$$

Para determinar $\Delta\beta_{n+1}^k$ é imposta a seguinte condição

$$\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^{k+1}; \gamma) = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{V}_\gamma$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^{k+1}; \gamma) = \mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k + \Delta\beta_{n+1}^k; \gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{V}_\gamma. \quad (4.64)$$

Considerando $\mathcal{F}_\gamma(\circ, \circ; \circ)$ como suficientemente regular e expandindo $\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k + \Delta\beta_{n+1}^k; \gamma)$ em uma série de Taylor em β_{n+1}^k , obtém-se, para uma aproximação de primeira ordem,

$$\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k + \Delta\beta_{n+1}^k; \gamma) = \mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k; \gamma) + D\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k; \gamma) [\Delta\beta_{n+1}^k]. \quad (4.65)$$

A partir da Eq.(4.64) é possível escrever

$$D\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k; \gamma) [\Delta\beta_{n+1}^k] = -\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k; \gamma). \quad (4.66)$$

com o módulo tangente consistente, dado por

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}_\gamma(\bar{u}_{n+1}, \beta_{n+1}^k; \gamma) [\Delta\beta_{n+1}^k] = & \int_{\Omega_o} \frac{c_\beta}{\Delta t} \Delta\beta_{n+1}^k \gamma d\Omega_o + \int_{\Omega_o} k_o^g \nabla_{\bar{X}}(\Delta\beta_{n+1}^k) \cdot \nabla_{\bar{X}} \gamma d\Omega_o \\ & + \int_{\Omega_o} H \left((-Y_o^r + A_o)_{n+1} - r_\beta^* (\beta_{n+1}^k) \right) \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ r_\beta^* (\beta_{n+1}^k + \varepsilon \Delta\beta_{n+1}^k) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \gamma d\Omega_o \end{aligned} \quad (4.67)$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ r_{\beta}^* (\beta_{n+1}^k + \varepsilon \Delta \beta_{n+1}^k) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ r_{\beta} (\beta_{n+1}^k + \varepsilon \Delta \beta_{n+1}^k) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\eta}_{\alpha}} \Delta \beta_{n+1}^k H(-\beta_{n+1}^k) + \frac{1}{\bar{\eta}_{\alpha}} \Delta \beta_{n+1}^k H(\beta_{n+1}^k - 1) \end{aligned} \quad (4.68)$$

e

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ r_{\beta} (\beta_{n+1}^k + \varepsilon \Delta \beta_{n+1}^k) \right\} \Big|_{\varepsilon=0} = - \left\{ (p_a - 1) Y_o^c (1 - \beta_{n+1}^k)^{p_a - 2} \right\} \Delta \beta_{n+1}^k. \quad (4.69)$$

A expressão (4.69) resulta da função resistência estabelecida na Eq. (3.70).

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para a avaliação da performance da implementação do modelo constitutivo de rochas salinas proposto no capítulo 3, utilizando o método dos elementos finitos. O modelo foi implementado em uma estrutura baseada em Fortran orientado a objeto e o pós-processamento executado com o software GiD 7.2.

Nos ensaios triaxiais de fluência e no ensaio uniaxial de tração, as amostras são cilíndricas com razão de proporcionalidade (comprimento/diâmetro) de 2. Assim, os exemplos simulados numericamente, são tratados como axissimétricos e simétricos em relação à altura (Fig. 5.1). Já as análises de cavidades em sal foram tratadas sob a hipótese de estado plano de deformação. O elemento finito empregado nas análises é o quadrático triangular de 6 nós (tri6) visando evitar o aparecimento do fenômeno de travamento volumétrico (*volumetric locking*). Para a discretização da geometria dos corpos de prova axissimétricos optou-se por dois elementos finitos, devido a deformação homogênea. Os resultados numéricos das análises de fluência foram obtidos com uma tolerância de convergência global de 10^{-4} e das análises de dano com uma tolerância de convergência global de 10^{-6} .

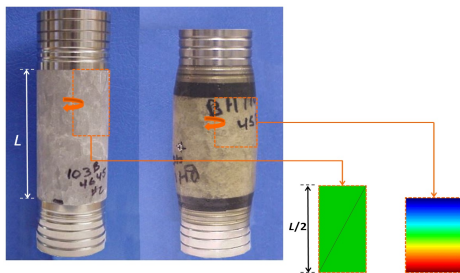


Figura 5.1: Corpo de prova cilíndrico antes e após a deformação – adaptado de Alfredsson e Stigh (2004).

As simulações foram realizadas em rochas salinas brasileiras da formação Muribeca, no Sergipe, e em rochas salinas dos Estados Unidos localizadas no Golfo do México (campo de *West Hackberry*). Nas análises de rochas salinas brasileiras, os corpos de prova possuem 176 mm de comprimento e 88 mm de diâmetro, conforme especificado nos experimentos de Poiate Jr. (2012). Logo, as amostras dos exemplos simulados numericamente,

tratados como axissimétricos e simétricos em relação à altura, apresentam 88 mm de comprimento e 44 mm de raio. Enquanto nas análises do sal de *West Hackberry* consideram-se amostras com 210 mm de comprimento e 108 mm de diâmetro (WAWERSIK; HANNUM; LAUSON, 1980). Deste modo, os corpos de prova dos exemplos numéricos apresentam 105 mm de comprimento e 54 mm de raio.

Conforme já mencionado, o modelo proposto neste trabalho possibilita duas leis de fluência para descrição da resposta viscoplástica do sal, ou seja, a lei de Mecanismo Duplo de Deformação Modificada (Tab. 3.2) e a de Multimecanismos de Deformação (Tab. 3.1). A validação do modelo adotando uma destas leis de fluência foi realizada mediante a reprodução da simulação de ensaios triaxiais de fluência.

5.1 Ensaios triaxiais de fluência - Sal brasileiro

Para validação dos modelos viscoplásticos implementados foram realizadas simulações de ensaios triaxiais de fluência. Nestas simulações, a extremidade superior do corpo de prova é submetida a uma carga na forma de degrau, ou seja, um carregamento de tensão axial σ_a ; e a face radial do corpo é sujeita a uma tensão confinante σ_c . Este carregamento provoca na amostra uma tensão diferencial (*stress difference*), dada pela diferença entre a tensão axial e a tensão confinante aplicadas na amostra, isto é, $\sigma_d = \sigma_a - \sigma_c$. O estado de tensão e a temperatura são mantidos constantes durante o ensaio. O corpo de prova utilizado nas análises e as condições de contorno aplicadas são ilustradas na Fig. 5.2.

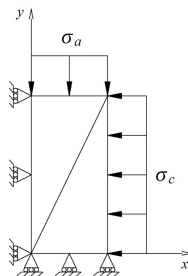


Figura 5.2: Malha e condições de contorno para a simulação dos ensaios triaxiais.

Inicialmente os modelos foram avaliados mediante a reprodução da

simulação de dois ensaios triaxiais de fluência. A temperatura, as tensões e a duração de cada ensaio de fluência são apresentados na Tab. 5.1.

Tabela 5.1: Especificação dos ensaios triaxiais de fluência em rochas salinas brasileiras (COSTA et al., 2005; POIATE JR; COSTA; FALCAO, 2006).

Ensaio	T (°C)	σ_c (MPa)	σ_a (MPa)	t (h)
A	86	10	20	350
B	86	10	24	1000

Os resultados experimentais do ensaio A e B adotados como referência para a validação dos modelos de fluência constam em Poiate Jr, Costa e Falcao (2006) e Costa et al. (2005), respectivamente. Estes ensaios foram executados em amostras de sal da formação Muribeca, em Sergipe, região próxima a da Mina Taquari-Vassouras.

5.1.1 Modelo de Mecanismo Duplo Modificado

O ajuste do modelo admitindo a lei de Mecanismo Duplo Modificada (Tab. 3.2) foi realizado com base nos parâmetros da fluência primária fornecidos em Fossum e Fredrich (2002) e da fluência secundária encontrados em Costa et al. (2005). As Tabs. 5.2 e 5.3 mostram os parâmetros do modelo para a halita brasileira após o ajuste aos dados experimentais.

Tabela 5.2: Parâmetros elásticos e das funções $\Psi_{\tilde{\eta}_\alpha}$, f e G_{vp}^* para as rochas salinas.

E (GPa)	31	$\tilde{\eta}_\alpha$	1×10^{-2}
ν	0,25	η	0,15
μ_o (GPa)	12,4	ξ	1,0
		C_h (MPa)	3,0
		C_∞ (MPa)	0,1
		b	0,1
		ϑ	0,21

A Fig. 5.3 apresenta os pontos experimentais e as curvas de fluência obtidas numericamente para os ensaios A e B, adotando-se a lei de Mecanismo Duplo de Deformação Modificada.

Tabela 5.3: Parâmetros viscoplásticos das rochas salinas brasileiras - lei de Mecanismo Duplo Modificada.

Fluência primária		Fluência secundária	
m	3	τ_o (MPa)	9,91
K_o	$2,200 \times 10^5$	$\dot{\epsilon}_o$ (h^{-1})	$1,888 \times 10^{-6}$
c_b (K^{-1})	0,009198	T_o ($^{\circ}\text{C}$)	86
α_w	-17,37	n_1	3,4
χ_w	-7,738	n_2	7,8
α_r	0,58	Q (kcal/mol)	12
χ_r	0	R (kcal/mol.K)	$1,9858 \times 10^{-3}$

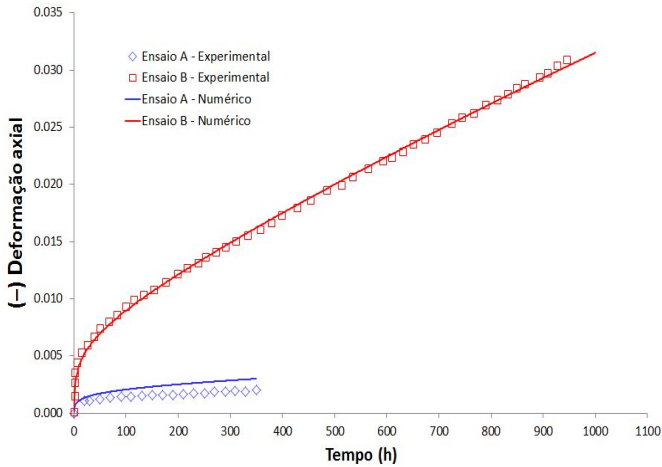


Figura 5.3: Resultados experimentais e numéricos para a halita brasileira – lei de Mecanismo Duplo Modificada.

Atualmente o modelo de Mecanismo Duplo de Deformação, proposto por Costa et al. (2005), é avaliado somente a partir da inclinação da reta produzida, a qual representa a fluência secundária. Portando, não é possível avaliar a performance do modelo de acordo com o resultado final, pois a fase primária da fluência não é considerada. Neste trabalho, em virtude da inclusão da fase transiente foi possível avaliar o modelo com base no resultado final, conforme mostrado na Fig. 5.3. Observando a Fig. 5.3 averigua-se que adotando este conjunto de parâmetros (Tab. 5.2 e 5.3) a resposta produzida pelo modelo, através do código desenvolvido neste trabalho, apresenta boa concordância com os valores experimentais do ensaio B. Entretanto, obteve-se certa discrepância em relação aos dados experimentais do ensaio A de Poiate Jr, Costa e Falcao (2006). Esta disparidade pode estar associada ao erro no processo de captura dos pontos no gráfico experimental, o qual apresenta uma escala substancialmente reduzida no eixo das ordenadas.

Na Fig. 5.4 pode-se verificar o endurecimento provocado na rocha (evolução da variável κ) em função da deformação viscoplástica efetiva gerada nos ensaios triaxiais de fluência. Neste trabalho, a variável κ , responsável pela descrição dos fenômenos de amolecimento e endurecimento isotrópicos da rocha, pertence à função transiente incluída no modelo de Mecanismo Duplo a fim de representar a fase primária da fluência. O ensaio A foi simulado com o mesmo tempo de análise do ensaio B de 1000 h. Observa-se que quanto maior a tensão diferencial aplicada no corpo maior o endurecimento da rocha, ou seja, a variável κ evolui e satura mais rapidamente.

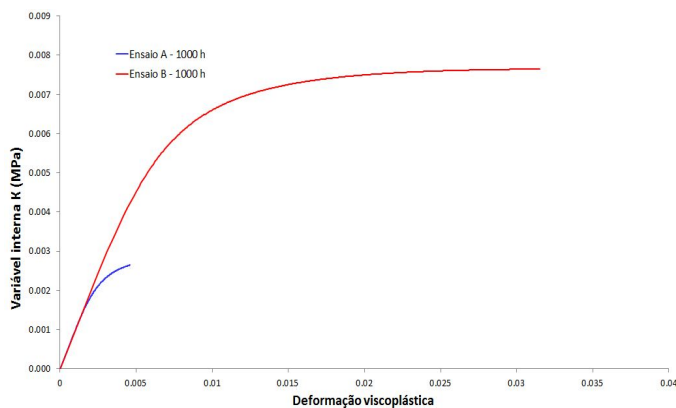


Figura 5.4: Evolução da variável κ em função de ϵ_{ef}^p .

5.1.2 Modelo de Multimecanismos de Deformação

O ajuste do modelo empregando a lei de Multimecanismos de Deformação (Tab. 3.1) decorreu com referência nos parâmetros encontrados em Fossum e Fredrich (2002) e Firme (2013). A Tab. 5.4 apresenta os parâmetros de fluência obtidos para a halita brasileira após o ajuste aos dados experimentais. Os parâmetros elásticos e das funções $\Psi_{\tilde{\eta}_\alpha}$, f e G_{vp}^* são os mesmos da Tab. 5.2.

Tabela 5.4: Parâmetros viscoplásticos das rochas salinas brasileiras - lei de Multimecanismos de Deformação.

Fluência primária		Fluência secundária	
m	3	A_1 (s^{-1})	$5,100 \times 10^{22}$
K_o	$1,800 \times 10^5$	Q_1 (J/mol)	104.500,00
c_b (K^{-1})	0,009198	n_1	5,5
α_w	-8,0	A_2 (s^{-1})	$3,990 \times 10^{12}$
χ_w	-7,738	Q_2 (J/mol)	41.800,00
α_r	0,58	n_2	5
χ_r	0	τ_o (MPa)	20,57
		d_o	5.335,00
		B_1 (s^{-1})	$9,981 \times 10^6$
		B_2 (s^{-1})	$4,976 \times 10^{-2}$

Na Fig. 5.5 são ilustrados os valores experimentais e as curvas de fluência obtidas nas simulações dos ensaios A e B, empregando-se agora a lei de fluência de Multimecanismos de Deformação.

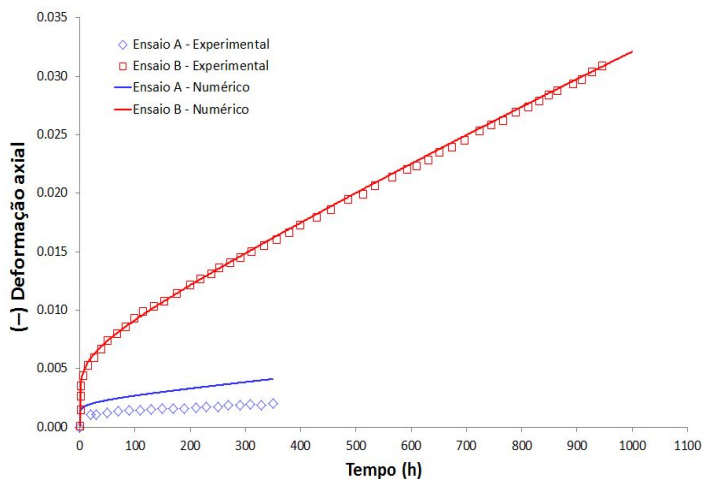


Figura 5.5: Resultados experimentais e numéricos para a halita brasileira – lei de Multimecanismos de Deformação.

Comparando as curvas de fluência ilustradas na Fig. 5.5 é possível constatar que com a adoção deste conjunto de parâmetros (Tab. 5.2 e 5.4) obtêm-se bons resultados na simulação do ensaio B, quando comparados aos dados experimentais encontrados para halita brasileira no trabalho de Costa et al. (2005). Porém, uma considerável discrepância foi obtida em relação aos dados experimentais do ensaio A. Conforme comentado anteriormente, esta disparidade pode estar relacionada ao erro no processo de captura dos dados da curva experimental de fluência.

5.2 Ensaios triaxiais de fluência - Sal de *West Hackberry*

As rochas salinas de *West Hackberry*, situadas no Golfo do México, exibem comportamento de fluência similar aos das rochas salinas brasileiras (POIATE JR., 2012). Em virtude disso, o modelo também foi validado para o sal de *West Hackberry*, adotando-se a lei de Multimecanismos de Deformação (Tab. 3.1) para a descrição da viscoplasticidade. Para tal, reproduziu-se numericamente três ensaios triaxiais de fluência conforme especificados na Tab. 5.5. Os ensaios procedem conforme descrito anteriormente para o sal brasileiro, aplicando-se o mesmo corpo de prova e as condições de contorno

ilustradas na Fig. 5.2.

Tabela 5.5: Especificação dos ensaios triaxiais de fluência em rochas salinas de *West Hackberry* (WAWERSIK; HANNUM; LAUSON, 1980).

Ensaio	T (°C)	σ_c (MPa)	σ_a (MPa)	t (h)
WH1	22	14	34,4	475
WH2	80	14	34,0	263
WH3	22	13,7	33,7	262
WH4	80	14,2	34,1	72

Os resultados dos ensaios laboratoriais adotados como base para a validação do modelo encontram-se em Munson (1999). O ajuste do modelo aos dados experimentais realizou-se com referência nos parâmetros dos sais retratados por Fossum e Fredrich (2002). A Tab. 5.6 apresenta os parâmetros viscoplásticos do modelo considerados para o sal de *West Hackberry*. Os parâmetros elásticos e das funções $\Psi_{\bar{\eta}\alpha}$, f e G_{vp}^* são os mesmos estabelecidos na Tab. 5.2.

Tabela 5.6: Parâmetros viscoplásticos das rochas salinas de *West Hackberry* - lei de Multimecanismos de Deformação.

Fluência primária		Fluência secundária	
m	3	A_1 (s ⁻¹)	$13,75 \times 10^{22}$
K_o	$6,275 \times 10^5$	Q_1 (J/mol)	104.500,00
c_b (K ⁻¹)	0,009198	n_1	5,4
α_w	-18,00	A_2 (s ⁻¹)	$35,00 \times 10^{12}$
χ_w	-7,738	Q_2 (J/mol)	41.800,00
α_r	0,58	n_2	5
χ_r	0	τ_o (MPa)	20,57
		d_o	5.335,00
		B_1 (s ⁻¹)	$7,121 \times 10^6$
		B_2 (s ⁻¹)	$3,550 \times 10^{-2}$

As curvas de fluência obtidas numericamente e os valores experimentais para os ensaios especificados na Tab. 5.5 são ilustradas nas Figs. 5.6 e 5.7.

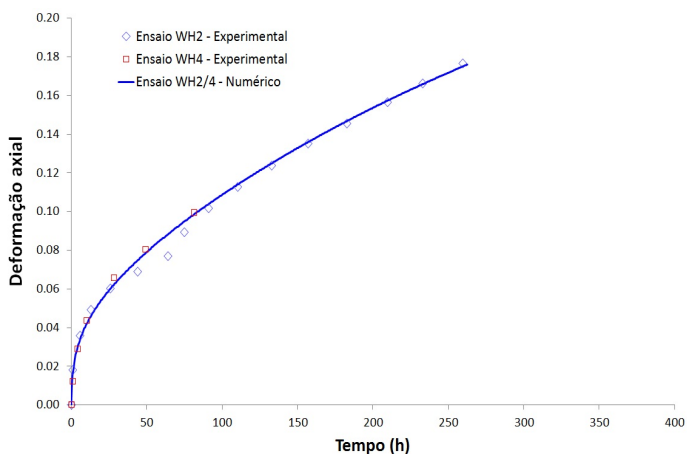


Figura 5.6: Resultados experimentais e numéricos - sal de *West Hackberry* à 80 °C.

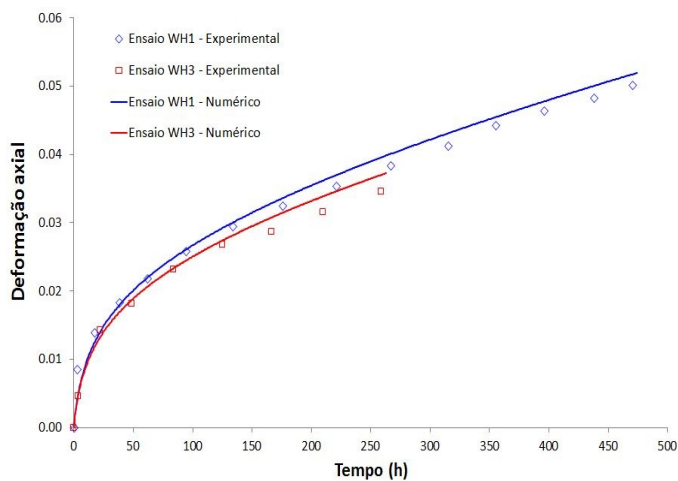


Figura 5.7: Resultados experimentais e numéricos - sal de *West Hackberry* à 22 °C.

Nestes exemplos, o código desenvolvido, adotando a lei de Multimecanismos de Deformação, capturou satisfatoriamente as deformações elevadas de ensaios triaxiais sujeitos a maiores tensões diferenciais. Bons resultados foram alcançados no ensaio numérico com temperatura de 80°C quando comparado aos dados experimentais da fluência (Fig. 5.6). O modelo possibilitou calcular também curvas de fluência com ajustes razoáveis aos dados de laboratório à temperatura de 22°C (Fig. 5.7). A resposta de fluência a variação de temperatura foi bem reproduzida quando analisados os gráficos das simulações de 80°C e 22°C .

5.3 Ensaio de tração uniaxial

Uma análise de tração uniaxial foi realizada a fim de verificar a resposta qualitativa do dano no sal brasileiro. Neste problema a amostra é submetida a um carregamento prescrito de deslocamento na forma de rampa linear, com amplitude final de $u = 1,5 \times 10^{-6} \text{ mm}$. O deslocamento prescrito foi aplicado em 2000 incrementos. A Fig. 5.8 mostra o corpo de prova e as condições de contorno utilizadas no modelo axissimétrico analisado. Neste exemplo, emprega-se o modelo constitutivo da Tab. 3.2 e os parâmetros do sal brasileiro apresentados nas Tabs. 5.2 e 5.3. Os parâmetros de dano estimados para a simulação são mostrados na Tab. 5.7.

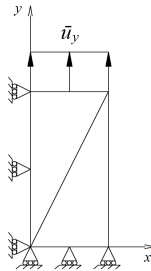


Figura 5.8: Condições de contorno e a malha para a simulação do ensaio de tração.

Tabela 5.7: Parâmetros de dano.

k_o^g	0,1
c_β	10
Y_o^c (Pa)	17,74
p_a	0,8

O diagrama tensão-deformação da simulação do ensaio de tração uniaxial é ilustrado na Fig. 5.9. Neste observa-se três regiões distintas que caracterizam o comportamento puramente frágil do sal. A primeira fase mostra o desenvolvimento de um comportamento elástico linear até o limite de resistência à ruptura da rocha. Na segunda fase, após o pico da curva, o corpo de prova exibe uma perda de resistência acentuada, onde a deformação axial continua aumentando mesmo com o decréscimo da tensão uniaxial. Na terceira fase, caracterizada por uma curva suave, a rocha atinge uma resistência menor que a resistência no pico, denominada de resistência residual. Logo, é possível observar que o modelo de dano descreveu qualitativamente bem a curva tensão-deformação do sal para um teste de tração uniaxial, caracterizando-a plenamente com um comportamento elastofrágil.

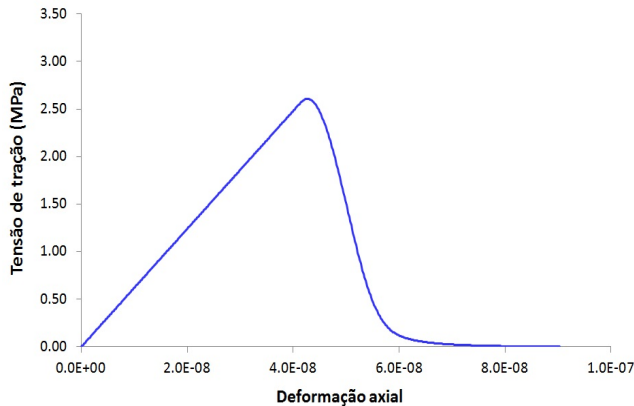


Figura 5.9: Curva tensão-deformação da simulação do ensaio de tração.

A Fig. 5.10 ilustra a evolução da variável escalar de dano em função do tempo para o ensaio de tração uniaxial simulado. No início do ensaio

observa-se que a evolução do dano permanece constante, i.e., $\dot{\beta} = 0$, implicando em $\beta = 0$. Quando o limite de resistência do material é atingido, a evolução da variável de dano aumenta descrevendo o processo de amolecimento devido à degradação progressiva das propriedades mecânicas do material, caracterizando, portanto, a segunda fase do diagrama tensão-deformação (Fig. 5.9).

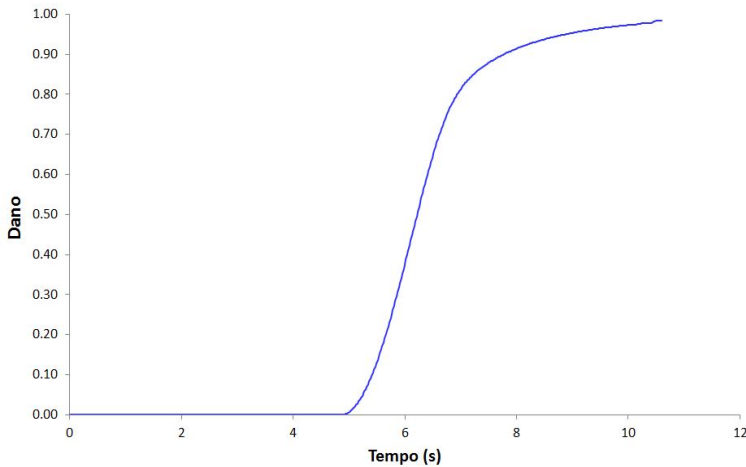


Figura 5.10: Evolução do dano em função do tempo.

Nesta simulação obteve-se um limite de resistência à tração de 2,6 MPa para o sal brasileiro. Este valor está dentro da faixa determinada em ensaios laboratoriais para a maioria dos sais investigados. Segundo Jeremic (1994) a resistência à tração do sal varia de 0,2 MPa a mais de 3 MPa, sendo 1 MPa o valor mais comum.

5.4 Análises de túneis em formações salinas

Nesta etapa foram realizadas simulações simplificadas do comportamento de túneis em formações salíferas. Nas análises propostas, o corpo salino é submetido a um carregamento prescrito de tensão na forma de rampa linear, na vertical $\sigma_V(t)$ e na horizontal $\sigma_H(t)$, até atingir a amplitude máxima de tensão requerida, i.e., σ_{V_o} e σ_{H_o} em 500 segundos. Uma vez alcançada a amplitude máxima, o estado de tensão é mantido constante durante o tempo

restante da análise. O carregamento linear é aplicado simultaneamente e de maneira proporcional, seguindo as respectivas relações para a tensão vertical e horizontal

$$\sigma_V(t) = \sigma_{V_o} \varpi(t) \quad \text{e} \quad \sigma_H(t) = \sigma_{H_o} \varpi(t) \quad (5.1)$$

em que ϖ

$$\varpi(t) = \begin{cases} \frac{t}{500}, & \text{se } t \leq 500 \\ 1, & \text{se } t > 500. \end{cases} \quad (5.2)$$

Valendo-se das condições de simetria, os problemas são modelados admitindo um quarto da seção transversal. As análises são bidimensionais, nas quais considera-se um estado plano de deformações.

5.4.1 Túnel circular

Inicialmente foi idealizado duas simulações de um túnel circular em rochas salinas. Nestas análises a rocha salina é sujeita a uma tensão vertical $\sigma_{V_o} = 24$ MPa e a uma tensão horizontal $\sigma_{H_o} = 10$ MPa. Na primeira simulação adota-se o modelo constitutivo apresentado na Tab. 3.2 com os parâmetros ajustados para o sal brasileiro (Tabs. 5.2 e 5.3), no qual a fluência é descrita pela lei de Mecanismo Duplo Modificada. Já na segunda simulação optou-se pelo modelo constitutivo apresentado na Tab. 3.1, porém utilizando os parâmetros do sal de *West Hackberry* (Tabs. 5.2 e 5.6), sendo neste modelo a fluência representada pela lei de Multimecanismos de Deformação. Os parâmetros de dano adotados são os estimados na Tab. 5.7. As dimensões do túnel, as condições de contorno e a malha sobre a geometria inicial são mostradas na Fig. 5.11. A malha de elementos finitos é composta por 556 elementos, totalizando 1179 nós.

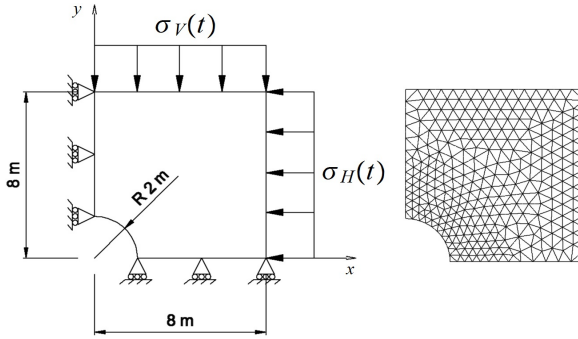


Figura 5.11: Malha e condições de contorno para a simulação do túnel circular.

As Figs. 5.12 - 5.15 ilustram a distribuição das curvas de nível referentes aos resultados obtidos para o sal brasileiro no instante final da análise, ou seja, $t = 3600$ segundos, para uma malha deformada com fator de escala de 15.

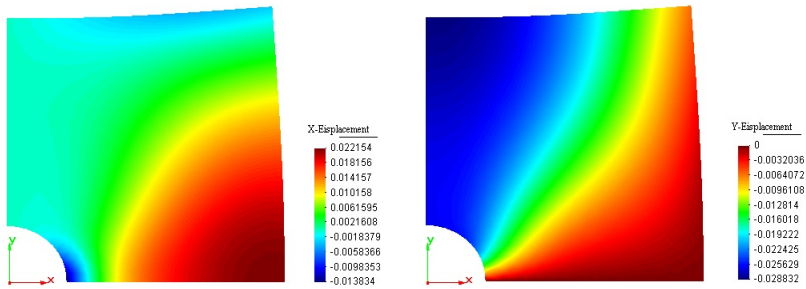


Figura 5.12: Deslocamentos na direção x e y - sal de brasileiro.

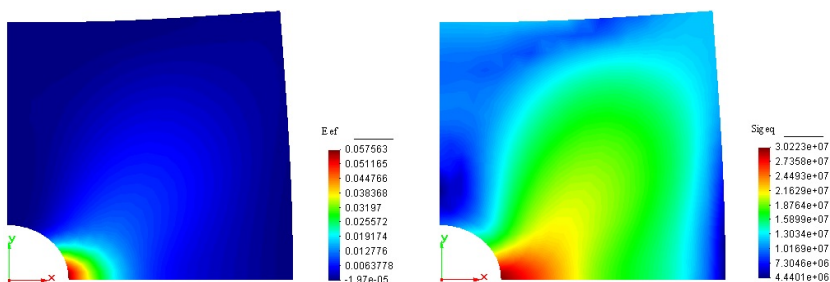


Figura 5.13: Deformação efetiva e tensão equivalente de *von Mises* - sal brasileiro.

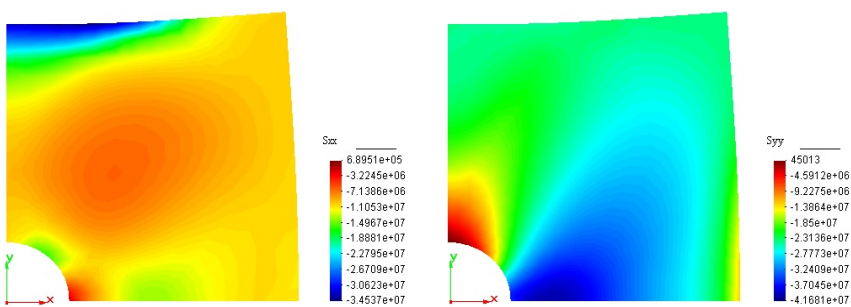


Figura 5.14: Tensões de *Cauchy* σ_{xx} e σ_{yy} - sal brasileiro.

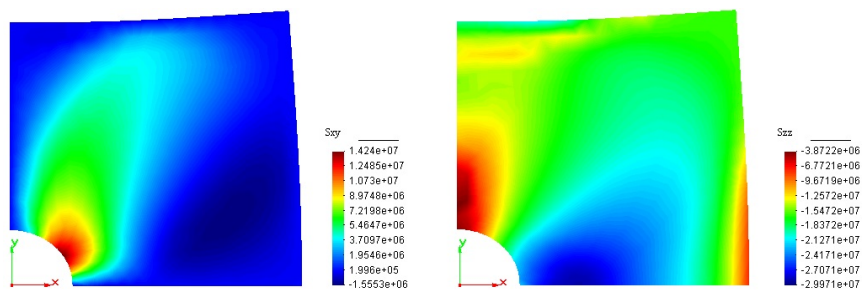


Figura 5.15: Tensões de *Cauchy* σ_{xy} e σ_{zz} - sal brasileiro.

As Figs. 5.16 - 5.19 apresentam a distribuição das curvas de nível referentes aos resultados obtidos para o sal de *West Hackberry* no instante final da análise, ou seja, $t = 3600$ segundos, para uma malha deformada com fator de escala de 15.

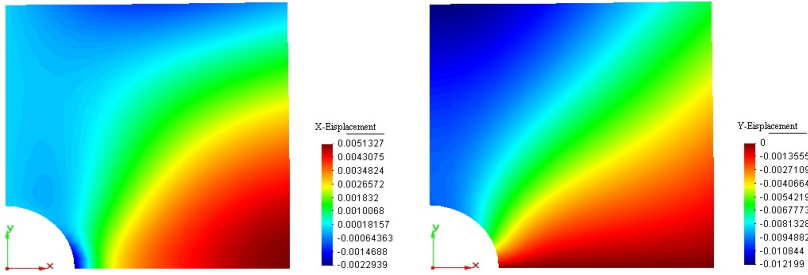


Figura 5.16: Deslocamentos na direção x e y - sal de *West Hackberry*.

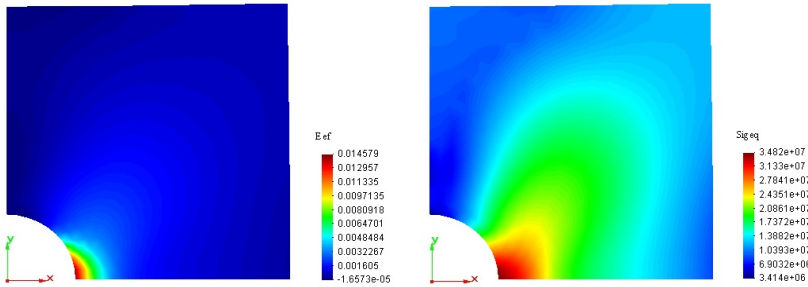


Figura 5.17: Deformação efetiva e tensão equivalente de *von Mises* - sal de *West Hackberry*.

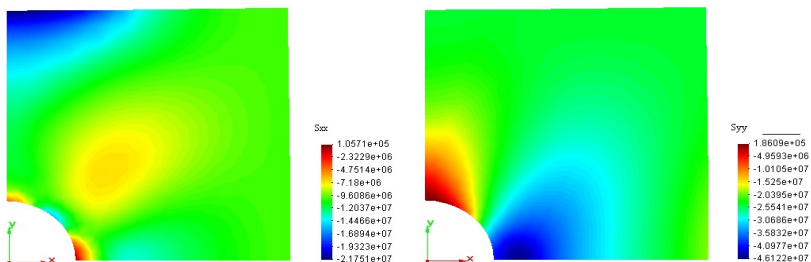


Figura 5.18: Tensões de Cauchy σ_{xx} e σ_{yy} - sal de *West Hackberry*.

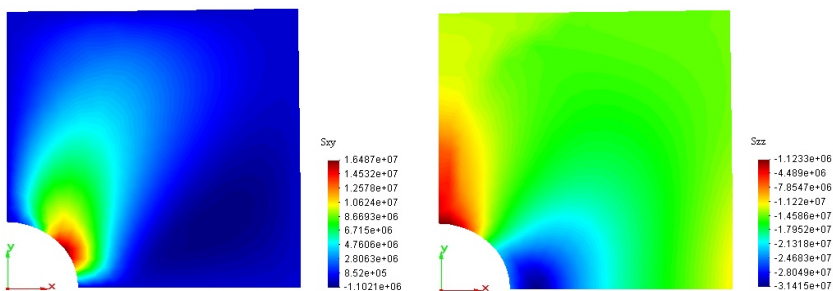


Figura 5.19: Tensões de Cauchy σ_{xy} e σ_{zz} - sal de *West Hackberry*.

Nas Figs. 5.12 e 5.16 observa-se que os maiores deslocamentos ocorrem na parede do túnel circular, evidenciando a tendência de fechamento do túnel no período simulado.

No túnel em sal brasileiro (Fig. 5.12) obteve-se um deslocamento horizontal máximo de $-1,38$ cm e um deslocamento vertical máximo de $-2,88$ cm. Enquanto no túnel em formação salífera de *West Hackberry* (Fig. 5.16) o deslocamento horizontal máximo foi de $-0,16$ cm e o deslocamento vertical máximo de $-1,04$ cm. Isto conduziu a uma deformação horizontal (fechamento do túnel) de $0,7\%$ para o sal brasileiro e de $0,08\%$ para o sal de *West Hackberry*. Esta disparidade também é observada nos ensaios triaxiais de fluência apresentados em Poiate Jr. (2012), nos quais se verifica que o sal de *West Hackberry* possui maior resistência e, portanto, menor mobilidade (taxa de fluência) que o sal brasileiro.

Tanto no túnel em sal brasileiro quanto no túnel em sal de *West hack-*

berry, observa-se o desenvolvimento de tensões altamente compressivas na região inferior do corpo próxima à circunferência, conforme mostram as Figs. 5.14, 5.15, 5.18 e 5.19 – componentes σ_{yy} e σ_{zz} do tensor tensão. As Figs. 5.13, 5.15, 5.17 e 5.19 também indicam que as maiores magnitudes de tensão de *von Mises* e de cisalhamento, respectivamente, situam-se em torno da circunferência do túnel. Similarmente ocorre com a deformação viscoplástica acumulada (Figs. 5.13 e 5.17), a qual, no instante final da análise, chegou a 0,0575 para o sal brasileiro e a 0,0108 para o sal de *West Hackberry*. Devido a menor rigidez do sal brasileiro, as tensões obtidas tornam-se menos localizadas em torno do túnel circular, podendo se observar curvas de nível de distribuições de tensões abrangendo regiões do corpo salino mais afastadas da circunferência.

Para esta geometria de túnel e condições de carregamento não houve regiões com propagação de dano durante o tempo da análise.

5.4.2 Túnel em arco

Neste exemplo considera-se a simulação do comportamento de um túnel em formato de arco. A formação salina é carregada na vertical e na horizontal com as respectivas tensões, $\sigma_{V_o} = 24$ MPa e $\sigma_{H_o} = 10$ MPa, conforme esquematizado na Fig. 5.20. Adota-se na análise o modelo constitutivo apresentado na Tab. 3.2 e os parâmetros das rochas salinas brasileiras (Tabs. 5.2 e 5.3). Os parâmetros de dano adotados são apresentados na Tab. 5.7. A Fig. 5.20 ilustra as dimensões do túnel e as condições de contorno utilizadas na simulação. A malha de elementos finitos é composta de 1129 nós e 530 elementos.

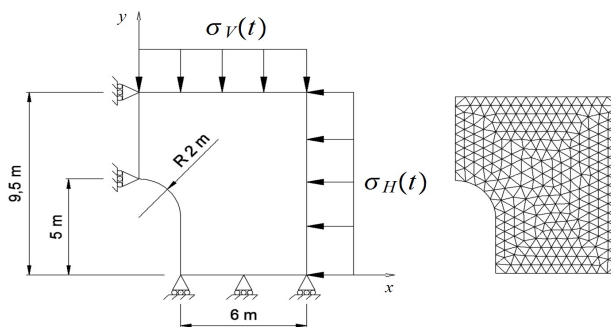


Figura 5.20: Malha e condições de contorno para a simulação do túnel em arco.

As Figs. 5.21 - 5.24 apresentam a distribuição das curvas de nível dos resultados alcançados para o sal brasileiro no instante final da análise, i.e., $t = 3000$ segundos, para uma malha deformada com fator de escala de 10.

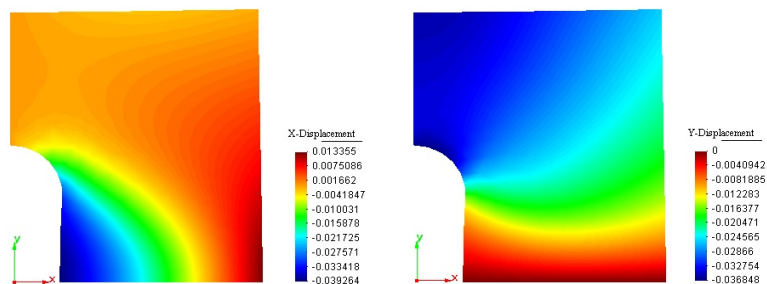


Figura 5.21: Deslocamentos na direção x e y .

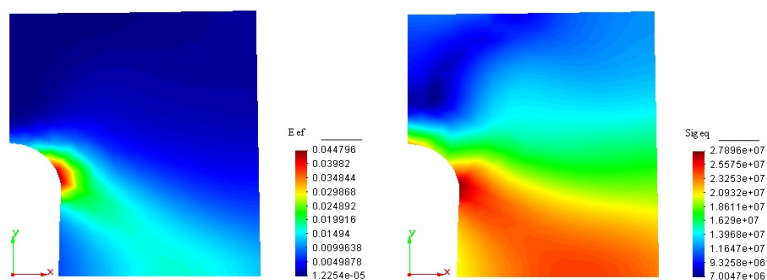


Figura 5.22: Deformação viscoplástica efetiva e tensão equivalente de *von Mises*.

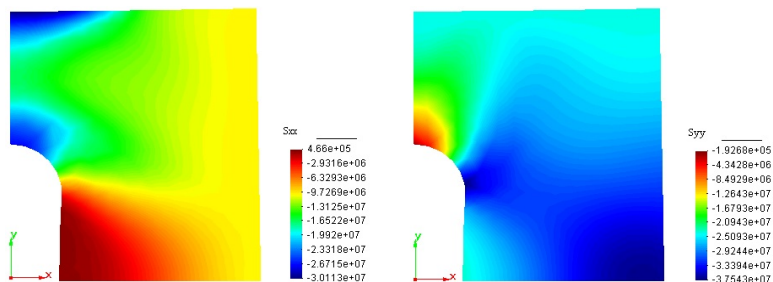


Figura 5.23: Tensões de *Cauchy* σ_{xx} e σ_{yy} .

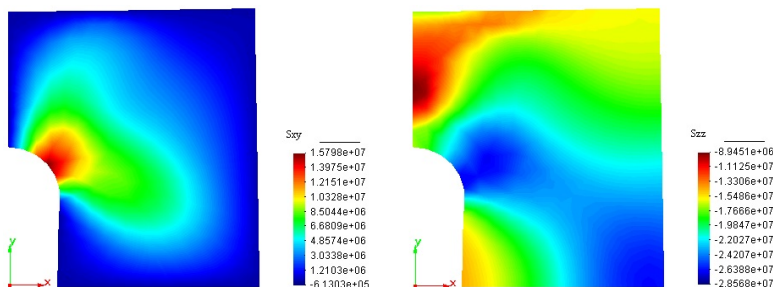


Figura 5.24: Tensões de *Cauchy* σ_{xy} e σ_{zz} .

Na Fig. 5.21 é possível observar o campo de deslocamento horizontal e vertical no túnel em rocha salina brasileira. O deslocamento horizontal máximo foi de $-3,92$ cm e o vertical máximo de $-3,68$ cm. Logo, obteve-se uma deformação horizontal no sentido do fechamento lateral do túnel de aproximadamente 1,96%. Este resultado mostra a redução do túnel devido à deformação do sal causada pelas tensões aplicadas na simulação.

A fim de avaliar melhor o túnel em arco, os resultados apresentados nas curvas de nível das tensões nas regiões de aplicação das cargas são desprezados. Observando a Fig. 5.23 – componente σ_{xx} , verifica-se uma alta concentração de tensão compressiva atuando no teto do túnel. As Figs. 5.23 e 5.24 – componentes σ_{yy} e σ_{zz} , também indicam tensões altamente compressivas, porém atuando na parede e no teto do túnel. Igualmente, observa-se na Fig. 5.22 que as maiores magnitudes de tensão de *von Mises* e de deformação

viscoplástica desenvolvem-se no teto e na parede do túnel. A deformação viscoplástica acumulada máxima neste local foi de 0,0447. Ainda, no teto do túnel, são evidenciadas as maiores magnitudes de tensão de cisalhamento, conforme mostrado nas curvas de nível da Fig. 5.24.

Neste exemplo de túnel também não ocorreu regiões com o desenvolvimento de dano durante o período da análise.

5.4.3 Túnel retangular

Aqui é representado o comportamento de um túnel retangular quando a rocha salina é submetida a uma tensão vertical $\sigma_{V_o} = 15$ MPa e a uma tensão horizontal $\sigma_{H_o} = 10$ MPa. Neste caso, optou-se por 2000 segundos ao invés de 500 (Eq. 5.2) para aplicar o carregamento máximo de tensão vertical e horizontal. Na simulação considera-se o modelo constitutivo apresentado na Tab. 3.2. Os parâmetros empregados são os apresentados no exemplo do ensaio de tração uniaxial. A Fig. 5.25 ilustra as dimensões do túnel e as condições de contorno utilizadas na análise. A malha de elementos finitos é composta de 992 nós e 459 elementos.

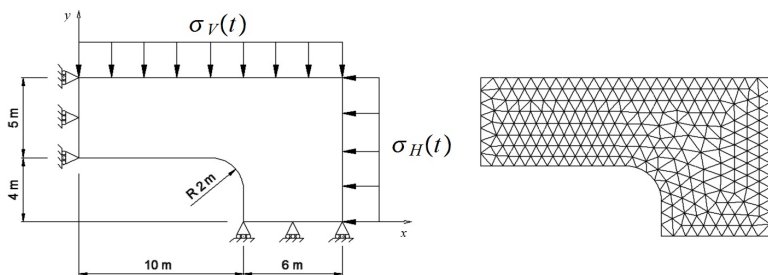


Figura 5.25: Malha e condições de contorno para a simulação do túnel retangular.

As Figs. 5.26 - 5.30 ilustram a distribuição das curvas de nível referentes aos resultados obtidos na simulação para uma malha deformada com fator de escala de 300.

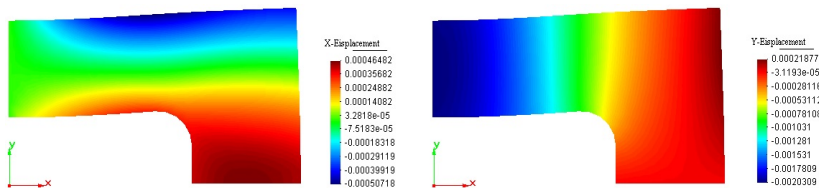


Figura 5.26: Deslocamentos na direção x e y .

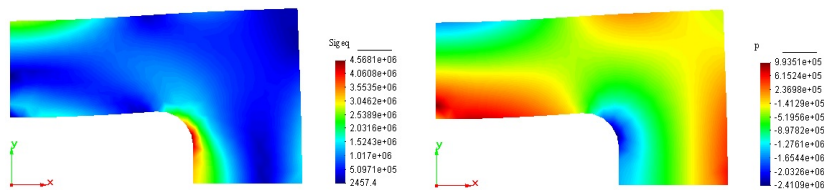


Figura 5.27: Tensão equivalente de *von Mises* e tensão hidrostática.

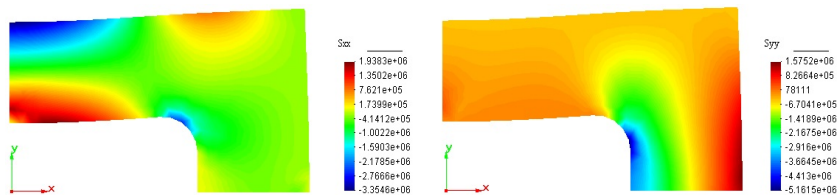


Figura 5.28: Tensões de Cauchy σ_{xx} e σ_{yy}

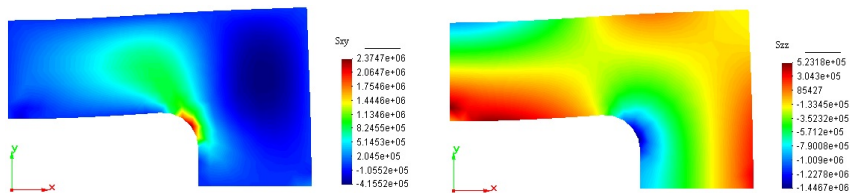


Figura 5.29: Tensões de Cauchy σ_{xy} e σ_{zz} .

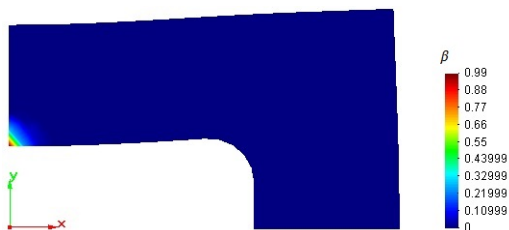


Figura 5.30: Distribuição do dano.

Nesta simulação ocorreu a falha frágil no teto do túnel antes do carregamento atingir a intensidade máxima estabelecida. A ruptura do teto foi produzida com o desenvolvimento de $\sigma_V(t) = 0,39$ MPa e $\sigma_H(t) = 0,26$ MPa, no instante $t = 51,9$ segundos.

A distribuição das tensões horizontais e verticais (Fig. 5.28) mostra o desenvolvimento de uma alta concentração de tensões de compressão na região arredondada do túnel. As Figs. 5.27 e 5.29 também indicam valores elevados para a tensão de *von Mises* e de cisalhamento neste mesmo local.

A Fig. 5.30 ilustra o dano gerado no túnel no instante final da análise. O dano inicia na região central do teto e propaga-se para locais mais distantes do centro da formação. O valor máximo do dano atingido no centro do teto manifesta a perda total de resistência da rocha causada pela ruptura localizada da formação salina.

Na simulação observa-se que as cargas aplicadas produzem flexão no teto do túnel, então, inicialmente, altas tensões horizontais trativas são desenvolvidas no centro do teto provocando o fissuramento e o gradual enfraquecimento da rocha. Entretanto, após a falha do material na região central, observa-se na Fig. 5.28 uma baixa magnitude de tensão horizontal no local de desenvolvimento do máximo valor de dano. Nesta região, devido à fissuração completa da rocha no instante final da análise, não há mais material íntegro capaz de suportar cargas, o que conduz ao decréscimo da tensão. Este decréscimo também é observado na tensão equivalente de *von Mises* e na tensão hidrostática ilustradas nas Figs. 5.27 e 5.30 respectivamente.

6 CONCLUSÕES

O levantamento bibliográfico revela que o comportamento dúctil das rochas salinas está bastante difundido, sendo possível encontrar mapas de mecanismos de deformações e modelos matemáticos com respaldo a condições simples e complexas de carregamento, dependendo da aplicação de interesse. Entretanto, o comportamento frágil e semifrágil, apesar de explorado e compreendido mecanicamente por alguns autores, ainda carece de modelos de dano elaborados com teorias de maior sofisticação. Assim, a principal contribuição deste trabalho de tese foi efetuada na fase do processo degradativo do material, ou seja, na descrição do regime frágil.

Para tal, foi proposto um modelo constitutivo elastoviscoplastico com dano não local em regime de grandes deformações, visto que, até o presente momento, nos modelos teóricos desenvolvidos para rochas salinas, foram incluídas apenas teorias locais de dano. Esta proposta confere um caráter inédito para a descrição do dano neste geomaterial, apesar da vasta gama de estudos para sua caracterização e desenvolvimento de modelos constitutivos.

Como diferencial nas leis de fluência de rochas salinas adotadas neste trabalho, admitiu-se uma formulação abordando a teoria de deformações finitas e as relações constitutivas fornecidas em termos de uma tensão do tipo *von Mises*. Para o modelo de fluência secundária de Costa et al. (2005), extensivamente calibrado para as rochas salinas brasileiras, propôs-se a representação da fase primária da fluência, combinado esta lei com a lei de Multimecanismos de Deformação de Munson, Fossum e Senseney (1990).

A fim de desenvolver o modelo constitutivo inicialmente foi estabelecida a medida de deformação de *Hencky* para descrição da deformação elástica do material, cujo par conjugado é a medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff*, e realizou-se a formulação forte das equações de equilíbrio de forças e de dano, considerando a abordagem apresentada por Fremond e Nedjar (1996).

Em seguida, visando a obtenção de um modelo constitutivo termodinamicamente consistente, desenvolveu-se o modelo teórico no contexto da termodinâmica dos meios contínuos e do método do estado local, através da definição das variáveis de estado e dos potenciais termodinâmicos. Como o modelo foi formulado no âmbito da mecânica não-suave (*nonsmooth mechanics*) processos de regularização também foram aplicados para contornar problemas de não diferenciabilidade local.

Na etapa subsequente, derivou-se a formulação fraca e incremental do problema elastoviscoplastico com dano. Para determinar soluções numéricas

aproximadas, utilizando o método dos elementos finitos de *Galerkin*, foi proposto um método numérico semi-implícito. Adicionalmente, operadores tangentes consistentes, associados ao método numérico semi-implícito, foram derivados através de um processo de linearização da forma fraca da equação de equilíbrio de forças e de dano respectivamente.

Nas simulações concretizadas, o modelo proposto, que viabiliza a utilização de distintas leis de fluência, representou adequadamente as fases primária e secundária da fluência das rochas salinas. De maneira geral, as curvas dos ensaios triaxiais de fluência foram bem descritas para o sal brasileiro e de *West Hackberry*.

A simulação dos ensaios triaxiais de fluência permitiu validar o modelo e o código implementado para a viscoplasticidade mediante a comparação dos resultados numéricos obtidos com os dados experimentais do sal brasileiro e do sal de *West Hackberry*. Deste modo, foi possível simular também o comportamento de túneis em formações salinas, com distintas formas de seção, e analisar o gradativo fechamento destes devido à deformação da rocha no período das simulações.

O ensaio de tração uniaxial foi descrito com boa qualidade pelo modelo de dano proposto. No diagrama tensão-deformação do ensaio trativo é possível identificar as distintas regiões que caracterizam o comportamento do sal como um material elastofrágil. A degradação da rocha também foi representada qualitativamente bem pelo modelo de dano na simulação do túnel retangular. A flexão produzida no teto do túnel desenvolveu tensões trativas que conduziram a progressiva deterioração da rocha na região central do teto até a ruptura.

Por fim, conclui-se que o modelo constitutivo proposto, através do código desenvolvido, descreveu adequadamente o comportamento de fluência de distintas rochas salinas (sal brasileiro e de *West Hackberry*) e capturou um comportamento qualitativo similar ao observado na literatura para o dano. Logo, mostra-se uma opção útil para a análise do comportamento dúctil e frágil de rochas salinas em diferentes aplicações de engenharia.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Desenvolvimento do modelo considerando um dano anisotrópico.
- Introdução da fase terciária da fluência, admitindo um dano dúctil, para descrever a falha por fluência de cavidades subterrâneas projetadas em formações evaporíticas.

- Discretização das equações pelo Método de Elementos Livres de Galerkin.
- Introdução da formulação de contato unilateral para simular o ensaio de compressão diametral, fundamental na determinação da resistência à tração das rochas.
- Implementação do modelo em software comercial de análise para a simulação de poços de petróleo e cavidades subterrâneas em seções evaporíticas junto a outras formações geológicas.
- Realizar a calibração do modelo constitutivo com base em ensaios experimentais de rochas salinas.
- Considerar outros fenômenos ao modelo de modo a torná-lo mais sofisticado. Como por exemplo, a introdução do efeito da cicatrização do dano, da umidade e de impurezas.

REFERÊNCIAS

- ALFREDSSON, K. S.; STIGH, U. Continuum damage mechanics revised: A principle for mechanical and thermal equivalence. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 41, n. 15, p. 4025–4045, 2004.
- ASSIS, A. P. de. *A method for evaluating the transient creep of potash*. Tese (Doutorado) — University of Alberta, Edmonton, Canada, January 1990.
- AUBERTIN, M.; GILL, D. E.; LADANYI, B. A unified viscoplastic model for the inelastic flow of alkali halides. *Mechanics of Materials*, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 63–82, 1991.
- AUBERTIN, M.; SGAOULA, J.; GILL, D. E. A viscoplastic-damage model for soft rocks with low porosity. In: *8th International Society for Rock Mechanics (ISRM) Congress*. Tokyo, Japan: International Society for Rock Mechanics, 1995.
- AUBERTIN, M.; YAHYA, O. M. L.; JULIEN, M. R. Modeling mixed hardening of alkali halides with a modified version of an internal state variables model. *International Journal of Plasticity*, Elsevier, v. 15, n. 10, p. 1067–1088, 1999.
- AYRES, S. *Gorleben, a minha vida para a vida inteira*. Novembro 2009. Disponível em: <<http://opensadorselvagem.org/mundo/este-pais-alemanha/gorleben-a-meia-vida-para-a-vida-inteira>>.
- BADRINARAYANAN, S.; ZABARAS, N. A sensitivity analysis for the optimal design of metal-forming processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 129, n. 4, p. 319–348, 1996.
- BARY, A. et al. Storing natural gas underground. *Oilfield Review*, v. 14, n. 2, p. 2–17, 2002.
- BORGES, R. *Avaliação Numérica de Perturbações de Tensões Associadas a Estruturas Salíferas e suas influências na Estabilidade de Poços*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.
- BOTELHO, F. V. C. *Análise Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2008.

- BOYLE, J. T.; SPENCE, J. *Stress analysis for creep*. Stoneham, Massachusetts: Butterworth Publishers, 1983.
- BRESOLIN, G. *Simulação do Comportamento Dúctil de Rochas Salinas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- CAROL, I.; RIZZI, E.; WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 38, n. 4, p. 491–518, 2001.
- CARTER, N. L. et al. Rheology of rock salt. *Journal of Structural Geology*, Elsevier, v. 15, n. 9, p. 1257–1271, 1993.
- CHAN, K. S. et al. A constitutive model for inelastic flow and damage evolution in solids under triaxial compression. *Mechanics of materials*, Elsevier, v. 14, n. 1, p. 1–14, 1992.
- CHAN, K. S. et al. *Constitutive representation of damage development and healing in WIPP salt*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1994.
- CHAN, K. S.; BODNER, S. R.; MUNSON, D. E. Permeability of wipp salt during damage evolution and healing. *International Journal of Damage Mechanics*, SAGE Publications, v. 10, n. 4, p. 347–375, 2001.
- CHAN, K. S. et al. Damage-induced nonassociated inelastic flow in rock salt. *International journal of plasticity*, Elsevier, v. 10, n. 6, p. 623–642, 1994.
- CHAN, K. S. et al. Constitutive representation of damage healing in WIPP salt. In: *35th U.S Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Reno, Nevada: American Rock Mechanics Association, 1995.
- CHAN, K. S.; FOSSUM, A. F.; MUNSON, D. E. Fracture and healing of rock salt related to salt caverns. In: *Solution Mining Research Institute Spring Meeting*. Las Vegas, Nevada: SMRI, Encinitas, CA, 1999. p. 67–89.
- CHAN, K. S. et al. Cleavage and creep fracture of rock salt. *Acta Materialia*, Elsevier, v. 44, n. 9, p. 3553–3565, 1996.

- CHAN, K. S. et al. A constitutive model for representing coupled creep, fracture, and healing in rock salt. In: *4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt*. Clausthal-Zellerfeld, Germany: Trans Tech Publications, 1998. p. 221–234.
- CHIARELLI, A.-S.; SHAO, J.-F.; HOTEIT, N. Modeling of elastoplastic damage behavior of a claystone. *International Journal of plasticity*, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 23–45, 2003.
- COSTA, A. M. *Uma Aplicação de Métodos Computacionais e Princípios de Mecânica das Rochas no Projeto e Análise de Escavações Destinadas a Mineração Subterrânea*. Tese (Doutorado) — UFRJ, 1984.
- COSTA, A. M. et al. Geomechanics applied to the well design through salt layers in brazil: A history of success. In: AMERICAN ROCK MECHANICS ASSOCIATION. *44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium*. Salt Lake City, Utah, 2010.
- COSTA, A. M. et al. Geomechanics applied to the well design through salt layers in Brazil: A history of success. In: *Ronaldo I. Borja, Multiscale and Multiphysics Processes in Geomechanics*. Stanford: Springer, 2011.
- COSTA, A. M. et al. Triaxial creep tests in salt-applied in drilling through thick salt layers in campos basin - brazil. In: *SPE/IADC Drilling Conference*. Amsterdam: Society of Petroleum Engineers, 2005. p. 23–25.
- COSTA, A. M.; POIATE JR., E. Rocha salina na indústria do petróleo: aspectos relacionados à reologia e à perfuração de rochas salinas. In: *W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal - Geologia e Tectônica - Exemplos das Bacias Brasileiras*. São Paulo: Beca, 2008. p. 362–385.
- COUNCIL, N. R. *The Waste Isolation Pilot Plant: A Potential Solution for the Disposal of Transuranic Waste*. Washington, DC: The National Academies Press, 1996. Disponível em: <<http://www.nap.edu/catalog/5269/the-waste-isolation-pilot-plant-a-potential-solution-for-the>>.
- CRISTESCU, N. D. A general constitutive equation for transient and stationary creep of rock salt. *International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics*, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 125–140, 1993.

- DAMIN, E. *Aplicações do Modelo Cam-clay Modificado ao Solo de Casca-vel/PR*. Cascavel - PR, Maio 2012.
- DE DEUS, H. P. *Proposições e aplicações computacionais em polímeros*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- DE SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. Continuum modelling and numerical simulation of material damage at finite strains. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer, v. 5, n. 4, p. 311–384, 1998.
- DE SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. New York: John Wiley & Sons, 2008.
- ETEROVIC, A. L.; BATHE, K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 30, n. 6, p. 1099–1114, 1990.
- FALCÃO, J. Perfuração de formações salíferas. In: *W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal - Geologia e Tectônica - Exemplos das Bacias Brasileiras*. São Paulo: Beca, 2008. p. 386–405.
- FARMER, P. et al. Exploring the subsalt. *Leading Edge*, v. 13, n. 8, p. 837, 1994.
- FIRME, P. A. L. P. *Modelagem Constitutiva e Análise Probabilística Aplicadas a Poços em Zonas de Sal*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2013.
- FLORENCIO, C. P. A mineração de evaporitos. In: *W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal - Geologia e Tectônica - Exemplos das Bacias Brasileiras*. São Paulo: Beca, 2008. p. 406–425.
- FOSSUM, A. F.; FREDRICH, J. T. *Salt mechanics primer for near-salt and sub-salt deepwater Gulf of Mexico field developments*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, July 2002.
- FOSSUM, A. F.; MUNSON, D. E. Probabilistic creep analysis of underground structures in salt. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 122, n. 3, p. 209–217, 1996.

- FREDRICH, J. T.; FOSSUM, A. F.; HICKMAN, R. J. Mineralogy of deepwater gulf of mexico salt formations and implications for constitutive behavior. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 57, n. 3-4, p. 354–374, 2007.
- FREIRE, C. B.; TELLO, C. C. O. Repositórios. *Revista Brasileira de Pesquisa e Desenvolvimento*, v. 9, n. 3, p. 71–82, Novembro 2007.
- FREITAS, J. *Ciclos deposicionais evaporíticos da bacia de santos uma análise cicloestratigráfica a partir de dados de 2 poços e de traços de sísmica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- FREMOND, M.; NEDJAR, B. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 33, n. 8, p. 1083–1103, 1996.
- GEORGE, T. *Underground Hydrocarbon Storage in Texas*. March 2007.
- GERE, J. M. *Mechanics of Materials*. 6. ed. Belmont, USA: Thomson Learning, Inc., 2004.
- GOLDBERG, R. K.; ROBERTS, G. D.; GILAT, A. Implementation of an associative flow rule including hydrostatic stress effects into the high strain rate deformation analysis of polymer matrix composites. *Journal of Aerospace Engineering*, v. 18, p. 18, 2003.
- GRAVINA, C. C. *Simulação Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1997.
- GÜNTHER, R.-M.; SALZER, K.; POPP, T. Advanced strain-hardening approach constitutive model for rock salt describing transient stationary and accelerated creep and dilatancy. In: *44th US Rock Mechanics Symposium and 5th US-Canada Rock Mechanics Symposium*. Salt Lake City, Utah: American Rock Mechanics Association, 2010.
- GURTIN, M. E. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Academic Press, 1981.
- HAMPEL, A.; SCHULZE, O. The composite dilatancy model: A constitutive model for the mechanical behaviour of rock salt. In: *Proc. of the 6th Conf. on the Mech. Behaviour of Salt*. Hannover, Germany: CRC Press, 2007. p. 99–107.

- HEUSERMANN, S.; ROLFS, O.; SCHMIDT, U. Nonlinear finite-element analysis of solution mined storage caverns in rock salt using the lubby2 constitutive model. *Computers & structures*, Elsevier, v. 81, n. 8, p. 629–638, 2003.
- HILL, R. Aspects of invariance in solid mechanics. *Advances in applied mechanics*, v. 18, p. 1–75, 1978.
- HOU, Z. Mechanical and hydraulic behavior of rock salt in the excavation disturbed zone around underground facilities. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 725–738, 2003.
- HUNSCHE, U.; HAMPEL, A. Rock salt-the mechanical properties of the host rock material for a radioactive waste repository. *Engineering geology*, Elsevier, v. 52, n. 3, p. 271–291, 1999.
- JEREMIC, M. L. *Rock mechanics in salt mining*. Student ed. A.A. Balkema: CRC Press, 1994.
- KRIEG, R. D. *Unified creep-plasticity model for halite*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1980.
- KRIEG, R. D. A unified creep-plasticity model for halite. *Mechanical Testing for Deformation Model Development, ASTM STP*, v. 765, p. 139–147, 1982.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. *Mechanics of solid materials*. London: Cambridge University Press, 1994.
- LEMAITRE, J.; LIPPMANN, H. *A course on damage mechanics*. Berlin: Springer, 1996.
- LIU, J. et al. The use of visco-elastoplastic damage constitutive model to simulate nonlinear behavior of concrete. *Acta Mechanica Solida Sinica*, Elsevier, v. 24, n. 5, p. 411–428, 2011.
- LOKEN, M.; STATHAM, W. Calculation of density and permeability of compacted crushed salt within an engineered shaft sealing system. In: ASCE. *Computing in Civil Engineering*. Philadelphia, 1997. p. 485–492.

- LOMENICK, T. F.; BRADSHAW, R. L. Deformation of rock salt in openings mined for the disposal of radioactive wastes. *Rock mechanics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 5–29, 1969.
- LUBLINER, J. *Plasticity theory*. New York: Macmillan, 1990.
- MA, L.-j. et al. A new elasto-viscoplastic damage model combined with the generalized hoek–brown failure criterion for bedded rock salt and its application. *Rock mechanics and rock engineering*, Springer, v. 46, n. 1, p. 53–66, 2013.
- MACHADO, G. d. C. *Método dos elementos livres de Galerkin aplicado à espumas poliméricas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- MASCARENHAS, W. N. *A Damage model for the ductile failure analysis of plastic components*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- MEER, S. D. et al. Current issues and new developments in deformation mechanisms, rheology and tectonics. *Geological Society, London, Special Publications*, Geological Society of London, v. 200, n. 1, p. 1–27, 2002.
- MINKLEY, W. et al. A visco-elasto-plastic softening model and its application for solving static and dynamic stability problems in potash mining. In: *Proceedings 2nd FLAC Symposium*. Lyon: Numerical Modeling in Geomechanics, 2001. p. 21–27.
- MOHRIAK, W.; SZATMARI, P. Introdução às propriedades químicas e físicas dos evaporitos. In: *W. Mohriak, P. Szatmari, & S. M. Couto Anjos, Sal - Geologia e Tectônica - Exemplos das Bacias Brasileiras*. São Paulo: Beca, 2008. p. 19–40.
- MUGHRABI, H. Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals. *Acta Metallurgica*, v. 31, n. 9, p. 1367–1379, 1983.
- MUNSON, D. E. *Preliminary deformation-mechanism map for salt (with application to WIPP)*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1979.

- MUNSON, D. E. *Constitutive model of creep in polycrystalline halite based on workhardening and recovery*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1993.
- MUNSON, D. E. Constitutive model of creep in rock salt applied to underground room closure. *International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts*, Elsevier, v. 34, n. 2, p. 233–247, 1997.
- MUNSON, D. E. *Multimechanism-Deformation Parameters of Domal Salts using Transient Creep Analysis*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1999.
- MUNSON, D. E.; DAWSON, P. R. *Constitutive model for the low temperature creep of salt (with application to WIPP)*. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1979.
- MUNSON, D. E.; DAWSON, P. R. A workhardening/recovery model of transient creep of salt during stress loading and unloading. In: *23rd U.S Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Berkeley, California: American Rock Mechanics Association, 1982.
- MUNSON, D. E.; DAWSON, P. R. Salt-constitutive modeling using mechanism maps. In: *1st conference on the mechanical behavior of salt*. Clausthal, Germany: Tech Publications, 1984. p. 717–737.
- MUNSON, D. E.; DEVRIES, K. Development and validation of a predictive technology for creep closure of underground rooms in salt. In: *7th International Congress on Rock Mechanics (ISRM)*. A. A. Balkema, Rotterdam: International Society for Rock Mechanics, 1991.
- MUNSON, D. E. et al. Measured and calculated closures of open and brine filled shafts and deep vertical boreholes in salt. In: *33th U.S Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Santa Fe, New Mexico: American Rock Mechanics Association, 1992.
- MUNSON, D. E.; FOSSUM, A. F.; SENSENY, P. E. Approach to first principles model prediction of measured WIPP in situ room closure in salt. In: *30th U.S Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Morgantown, West Virginia: American Rock Mechanics Association, 1989. p. 673–680.

- MUNSON, D. E.; FOSSUM, A. F.; SENSENY, P. E. Approach to first principles model prediction of measured WIPP (Waste Isolation Pilot Plant) *in-situ* room closure in salt. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Elsevier, v. 5, n. 1, p. 135–139, 1990.
- MUNSON, D. E.; WAWERSIK, W. R. Constitutive modeling of salt behavior - state of the technology. In: *7th International Society for Rock Mechanics (ISRM) Congress*. Aachen, Germany: International Society for Rock Mechanics, 1991. p. 1797–1810.
- MUNSON, D. E.; WEATHERBY, J. R.; DEVRIES, K. L. Two-and three-dimensional calculations of scaled in situ tests using the M-D model of salt creep. In: *34th U.S Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Madison, Wisconsin: American Rock Mechanics Association, 1993.
- NAUMENKO, H. A. K. *Modeling of creep for structural analysis. Foundations of Engineering Mechanics*. Berlin: Springer Verlag, 2007.
- ORTIZ, M.; RADOVITZKY, R. A.; REPETTO, E. A. The computation of the exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 52, n. 12, p. 1431–1441, 2001.
- PEREZ, A. et al. Meeting the subsalt challenge. *Oilfield Review*, v. 20, n. 3, p. 32–45, 2008.
- PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J.; HONNOR, M. E. A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 94, n. 1, p. 35–61, 1992.
- POIATE JR., E. *Mecânica das rochas e mecânica computacional para projeto de poços de petróleo em zonas de sal*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, 2012.
- POIATE JR, E.; COSTA, A. M.; FALCAO, J. L. Well design for drilling through thick evaporite layers. In: *IADC/SPE Drilling Conference*. Miami, Florida: Society of Petroleum Engineers, 2006.
- POIATE JR., E.; COSTA, A. M.; FALCAO, J. L. Well design for drilling through thick evaporite layers. In: *SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS. IADC/SPE Drilling Conference*. Miami, Florida, USA, 2006.

- REDDY, J. N. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- ROSSI, R. *Proposições e Aplicações Considerando o Método de Galerkin Livre de Elementos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.
- SALARI, M. R. et al. A coupled elastoplastic damage model for geomaterials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 193, n. 27, p. 2625–2643, 2004.
- SERATA, S. Theory and model of underground opening and support system. In: *The 6th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Rolla, Missouri: American Rock Mechanics Association, 1964.
- SERATA, S. Application of continuum mechanics to design of deep potash mines in Canada. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, v. 5, n. 4, p. 293–314, 1968.
- SGAOULA, J.; AUBERTIN, M.; GILL, D. E. Using internal state variables for modeling the viscoplastic behavior of rock salt in the semi-brittle regime. In: *35th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. Reno, Nevada: American Rock Mechanics Association, 1995.
- SHAO, J. F.; CHIARELLI, A. S.; HOTEIT, N. Modeling of coupled elastoplastic damage in rock materials. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 35, n. 35, p. 444–444, 1998.
- SHAO, J.-F. et al. A coupled elastoplastic damage model for semi-brittle materials and extension to unsaturated conditions. *Mechanics of materials*, Elsevier, v. 38, n. 3, p. 218–232, 2006.
- SILVA, I. J. M. *Implementação via algoritmo implícito de modelos de fluência de rochas salinas em programa de elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, 2010.
- SIMO, J. C. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 99, n. 1, p. 61–112, 1992.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. *Computational inelasticity*. New York: Springer, 2006. 392 p.

- TAQIEDDIN, Z. N.; VOYIADJIS, G. Z. Elastic plastic and damage model for concrete materials: Part II: Implementation and application to concrete and reinforced concrete. *Int. J. Struct Changes Solids–Mech. and App.*, v. 1, n. 1, p. 187–209, 2009.
- VOYIADJIS, G. Z.; TAQIEDDIN, Z. N. Elastic plastic and damage model for concrete materials: Part I-theoretical formulation. *The International Journal of Structural Changes in Solids*, v. 1, n. 1, p. 31–59, 2009.
- WAWERSIK, W. R.; HANNUM, D. W.; LAUSON, H. S. *Compression and extension data for dome salt from West Hackberry, Louisiana*. Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1980.
- WEBER, G.; ANAND, L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 173–202, 1990.
- WEIDINGER, P. et al. Creep behaviour of natural rock salt and its description with the composite model. *Materials Science and Engineering: A*, v. 234, p. 646–648, 1997.
- WOLTERS, K. -H. L. R.; DÜSTERLOH., U. Evaluation of rock salt barriers with respect to tightness influence of thermomechanical damage, fluid infiltration and sealing/healing. In: *Mechanical Behaviour of Salt VII: Proceedings of the 7th Conference on the Mechanical Behaviour of Salt*. Paris, France: CRC Press, 2012.
- WU, J. Y.; LI, J.; FARIA, R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 583–612, 2006.
- YAHYA, O. M. L.; AUBERTIN, M.; JULIEN, M. R. A unified representation of the plasticity, creep and relaxation behavior of rocksalt. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, v. 37, n. 5, p. 787–800, 2000.
- YANG, C. *Time-dependent behavior of rock salt: Experimental investigation and theoretical analysis*. Tese (Doutorado) — University of Nevada, Reno, 2000.

- YAO, H.-T. et al. A review of creep analysis and design under multi-axial stress states. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 237, n. 18, p. 1969–1986, 2007.
- ZHOU, H. et al. A thermo-plastic/viscoplastic damage model for geomaterials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 195–208, 2011.